

Об экспериментальной проверке формул В. А. Ацюковского для взаимоиндукции прямоугольных контуров

Д. В. Перегудов

9 апреля 2015 г.

А: Это клевета, у меня нет такой размерной константы! Вы даже не удосужились почитать мои книги!

П: (показывает случайную размерную константу в его формулах) Вот она.

А: Так. И что?

П: Ну... э... Вы только что сказали, что её нет.

А: Так. И что?

П: А она есть.

А: Так. И что?

П: Может быть, вы извинитесь?

А: А-а-а... Ну ладно, извините. Это старый вариант. Тут ничего не должно быть.

П: Но это же размерная величина.

А: Так. И что?

П: Её нельзя просто выбросить! У неё есть размерность!

А: (кричит) Что за придирки! Я не желаю общаться с этим оппонентом! Это неконструктивно!

Из стенограммы “дебатов”

Содержание

1	Введение	3
2	Сетевые ресурсы	4
3	Схема эксперимента	4
4	Что проверяем? Эфиродинамика	5
5	Что проверяем? Электродинамика Максвелла	6

6	Сизифов труд	7
7	Соображения размерности	8
8	Первый опыт Перегудова	8
8.1	Сравнение с эфиродинамикой	10
8.2	Сравнение с электродинамикой Максвелла	12
9	Второй опыт Перегудова	12
9.1	Сравнение с эфиродинамикой	13
9.2	Сравнение с электродинамикой Максвелла	13
10	Третий опыт Перегудова	13
10.1	Сравнение с эфиродинамикой	14
10.2	Сравнение с электродинамикой Максвелла	16
11	Первый опыт Цикры	16
11.1	Сравнение с эфиродинамикой (условное)	17
11.2	Сравнение с электродинамикой Максвелла	19
12	Абстрактная живопись	20
13	Общие выводы	21
14	О “дискусии” 16 декабря 2014 года	21
15	Взаимоиндукция произвольных полигональных контуров	22
16	Второй опыт Цикры	25
16.1	Сравнение с электродинамикой Максвелла	25
17	Третий опыт Цикры	26
17.1	Сравнение с электродинамикой Максвелла	27
18	Четвертый опыт Цикры (дезавуирован самим автором)	27
18.1	Сравнение с электродинамикой Максвелла	28
19	Нормальная (аристотелева) vs альтернативная логика, Поппер и фальсифицируемость	29

20	Четыре вопроса к Ацюковскому	30
20.1	Вопрос первый: предсказать ЭДС индукции в случае, отличном от первого эксперимента	31
20.2	Вопрос второй: рассчитать работу трансформатора под нагрузкой . . .	32
20.3	Вопрос третий: рассчитать коэффициент трансформации в зависимости от расположения обмоток	33
20.4	Вопрос четвертый: рассчитать ЭДС в контуре, расположенном над плоскостью с меняющейся намагниченностью	34
21	Оценки величин и рекомендации по проведению эксперимента	35
22	О проведении опытов Перегудова	38
23	Расчет взаимоиндукции произвольных полигональных контуров (первый способ)	39
24	Расчет взаимоиндукции произвольных полигональных контуров (второй способ)	41
25	Расчет воздушного цилиндрического трансформатора	43
26	Расчет цилиндрического трансформатора с магнитным сердечником	46
27	Расчет трансформатора под нагрузкой	48
28	Расчет и оптимизация трансформатора для питания первичного контура	49

1 Введение

Настоящий доклад является продолжением доклада, состоявшегося 14 октября 2014 года. Тогда мы пытались разобраться, что за эксперименты делал Ацюковский, какие результаты он получил и какие формулы он предлагает. Попытки наши, скажем прямо, имели весьма ограниченный успех: один из характерных моментов “дебатов” вынесен в виде эпиграфа к настоящему докладу.

Теперь же мы собираемся рассказать об проверочных экспериментах, проведенных за прошедшее время двумя людьми — Сергеем Цикрой в Донецке и Дмитрием Перегудовым в Москве. Этому рассказу посвящены первые 13 разделов, до раздела “Общие выводы”.

Кроме этого, в докладе обсуждаются еще два сюжета, органически связанных с основной темой. Разделы 14–18 посвящены рассказу о ряде экспериментов Цикры с

прямоугольными контурами, не лежащими в одной плоскости. Теоретических предсказаний эфиродинамики, даже “четырёхзначных”, мы для этих случаев не имеем. Необходимые теоретические предсказания электродинамики Максвелла излагаются в разделах 14 и 15.

Разделы 19 и 20 посвящены формулировке ряда теоретических задач, решение которых в рамках эфиродинамики позволило бы произвести другие опыты по ее проверке. Остальные разделы носят технический характер. В них более подробно рассмотрено решение задач, возникающих в связи с проведением “первого опыта по эфиродинамике”.

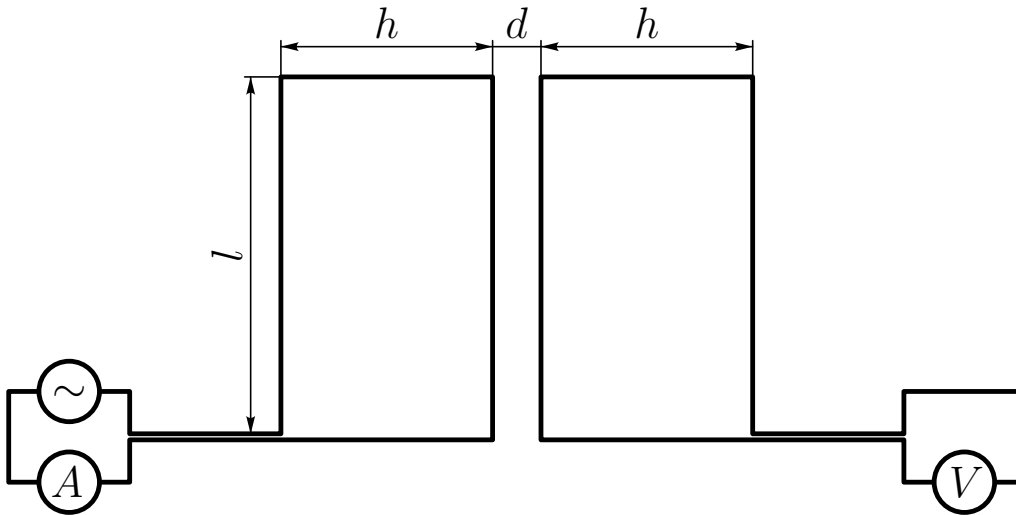
2 Сетевые ресурсы

Ниже собраны ссылки на ресурсы, имеющие отношение к обсуждаемой теме.

- Прошлая презентация <http://sto68.narod.ru/atzuk1.pdf>
- Новая презентация <http://sto68.narod.ru/atzuk2.pdf>
- Более подробное изложение со всеми техническими деталями на форуме Сайтэк <http://www.sciteclibrary.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?num=1411940184>
- Этот файл (обновление завершено) http://sto68.narod.ru/atzuk2_detailed.pdf
- Обсуждение других экспериментов Ацюковского на форуме Сайтэк <http://www.sciteclibrary.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?num=1409183233>
- Тексты Ацюковского в электронном виде, в том числе книги, на которые я ссылаюсь в этом файле <http://ivanik3.narod.ru/linksVAA.html>
- Видеозапись “дебатов” 14 октября 2014 года <http://youtu.be/BterCAxGKds>
- Видеозапись доклада 24 февраля 2015 года <http://youtu.be/rBpdPGQhgj0>
- Видеозапись “лекции” 16 декабря 2014 года <http://youtu.be/kUB68fm5AwE>
- Хронометраж “дебатов” 14 октября 2014 года <http://www.sciteclibrary.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?num=1205579884/307#307>
- Хронометраж доклада 24 февраля 2015 года <http://www.sciteclibrary.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?num=1205579884/441#441>

3 Схема эксперимента

Схема экспериментов, и Цикры и Перегудова, в точности соответствует схеме “первого эксперимента по эфиродинамике” Ацюковского, описанного в книге “12 экспериментов...” и других текстах автора.



4 Что проверяем? Эфиродинамика

К сожалению, добиться от Ацюковского какого-то одного конкретного предсказания “согласно эфиродинамике” для эксперимента, поставленного по приведенной выше схеме, не удалось. Поэтому приходится довольствоваться разными формулами, написанными в разное время в разных текстах или озвученными на устных докладах. Ниже приведены четыре такие формулы, которым я условно присвоил порядковые номера. “Третья формула Ацюковского” была введена в этот список по итогам октябрьских “дебатов”, когда выяснилось, что по поводу множителя a Ацюковский ничего внятного сказать не может.

- 1-я формула Ацюковского (“12 экспериментов по эфиродинамике”, Жуковский, 2003, стр. 9, формула (1.6); “Эфиродинамические основы электромагнетизма”, Москва, 2006, стр. 112, формула (3.51))

$$M = \frac{\mu_0 l l_0}{2\pi d} \left(1 + \frac{d}{d+2h} - \frac{2d}{d+h} \right), \quad l_0 = 1 \text{ м.}$$

- 2-я формула Ацюковского (“Общая эфиродинамика”, Москва, Энергоатомиздат, 2003, стр. 350, формула (8.123))

$$M = \frac{\mu_0 l R_{\text{пр}}}{2\pi d} \left(1 + \frac{d}{d+2h} - \frac{2d}{d+h} \right),$$

$R_{\text{пр}}$ — радиус провода вторичного контура.

- 3-я формула Ацюковского (с подгоночным параметром)

$$M = \frac{\mu_0 l a}{2\pi d} \left(1 + \frac{d}{d+2h} - \frac{2d}{d+h} \right), \quad a — \text{подгоняем.}$$

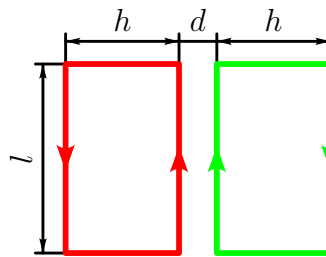
- 4-я формула Ацюковского (<http://www.youtube.com/watch?v=e5sojTkFrFc>, формула на плакате, 33-я минута. Спасибо Александру Федорову, <http://vk.com/fyodorov428>)

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{1}{1 + \frac{3d}{2h} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{h^2}} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(1 + \frac{d}{d+2h} - \frac{2d}{d+h} \right).$$

5 Что проверяем? Электродинамика Максвелла

В отличие от эфиродинамики, электродинамика Максвелла дает вполне однозначное предсказание для взаимной индукции прямоугольных рамок. Одновременно мы приведем еще формулу взаимной индукции бесконечных двухпроводных линий, поскольку именно ее приводит Ацюковский в книге “12 экспериментов...”

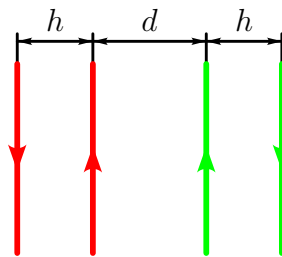
- Взаимная индукция прямоугольных рамок



$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[2g\left(\frac{d+h}{l}\right) - g\left(\frac{d}{l}\right) - g\left(\frac{d+2h}{l}\right) \right],$$

$$g(x) = 2\sqrt{x^2+1} + x \ln x + \frac{x}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}.$$

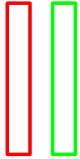

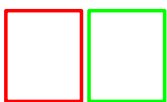

- Взаимная индукция двухпроводных линий на единицу длины



$$\frac{M}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{(d+h)^2}{d(d+2h)}.$$

Может приближенно описывать взаимную индукцию прямоугольных рамок при $d, h \ll l$.

6 Сизифов труд

	условия	формула для двухпроводных линий	формула для прямоугольных рамок
	$d \sim h \ll l$	приблизительно работает	работает и сводится к формуле для двухпроводных линий
	$d \ll h \ll l$	приблизительно работает, “логарифмическая расходимость”	работает и сводится к формуле для двухпроводных линий
	$d \ll h \sim l$	не работает	работает
	$d \ll l \ll h$	не работает	работает, “насыщение” $M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{l}{d} - 2 \right) + \dots$

Чтобы наглядно пояснить соотношение формул электродинамики Максвелла для взаимной индукции прямоугольных контуров и бесконечно длинных двухпроводных линий, я решил нарисовать приводимую выше таблицу. Движение сверху вниз по этой таблице можно представлять себе как раздвижку внешних проводников контуров при фиксированном расстоянии между внутренними проводниками. Предполагается, что $d \ll l$, просто потому, что охватить все случаи в одной небольшой таблице невозможно, да и на практике этот случай — самый важный. Значение h сперва того же порядка, что и d (первая строка). Затем оно растет, становясь много больше d , но оставаясь все еще много меньше l (вторая строка). Увеличиваясь далее, значение h становится сначала порядка l (третья строка), а затем и много больше l (четвертая строка).

Формула для прямоугольных рамок работает, разумеется, во всех случаях. Пока прямоугольные рамки похожи на две бесконечные двухпроводные линии, то есть пока $d, h \ll l$ (две первые строки таблицы), работает и формула для бесконечных двухпроводных линий, причем разница значений, которые дают формулы для двухпроводных линий и для прямоугольных рамок, незначительна. Отметим особо, что формула бесконечных двухпроводных линий работает всюду в области $d, h \ll l$ независимо от значения отношения h/d , вопреки мнению Ацюковского, что при $h/d \gg 1$ (вторая строка) должно наблюдаться “насыщение”, а формула для двухпроводных линий дает “логарифмическую расходимость”. В действительности формула

для прямоугольных рамок приводит к выводу о насыщении взаимоиндукции, однако только в случае $h \gg l$ (четвертая строка), когда формула для двухпроводных линий давно уже (еще на третьей строке) перестала работать.

7 Соображения размерности

Я хочу дополнить приведенную выше таблицу еще соображениями размерности. В задаче о взаимоиндукции прямоугольных контуров у нас есть три величины размерности расстояния: h , d и l . Кроме того, есть универсальная постоянная μ_0 . Из этих величин и должна складываться взаимоиндукция. Соображения размерности приводят к тому, что самоиндукция пропорциональна произведению μ_0 на один из параметров размерности длины (не ограничивая общности, будем считать, что $\mu_0 l$), а от двух безразмерных параметров, которые можно составить из трех параметров h , d и l , зависимость может быть произвольной

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} f\left(\frac{h}{d}, \frac{h}{l}\right).$$

Именно такой вид имеет формула для прямоугольных контуров согласно электродинамике Максвелла. Однако во всех формулах Ацюковского второй безразмерных аргумент функции f , а именно, h/l , выпадает.

Представляется довольно очевидным, что при $d, h \ll l$, то есть для очень длинных узких рамок взаимоиндукция должна быть примерно пропорциональна l , чтобы в пределе бесконечных двухпроводных линий можно было говорить о взаимоиндукции на единицу длины. Таким образом

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} f(h/d, 0) + \dots, \quad d, h \ll l.$$

Такой вид имеет формула взаимоиндукции бесконечных двухпроводных линий в электродинамике Максвелла, таков же вид всех формул Ацюковского. То есть Ацюковский, сам того не осознавая, пишет формулы, которые заведомо годятся только в случае $d, h \ll l$.

Упущенный Ацюковский параметр h/l важен еще и по другой причине. Как следует из приведенной выше таблицы, именно он, а вовсе не отношение h/d , определяет, когда будет наблюдаться насыщение взаимоиндукции.

Наконец, утверждение Ацюковского о зависимости функции f лишь от одного параметра, h/d , делает бессмысленными его упорные заявления, что эксперимент нужно непременно проводить при фиксированном d , увеличивая h . Ведь отношение h/d равным образом можно менять, оставляя постоянным h и уменьшая d , что гораздо проще осуществить технически. Если взаимоиндукция зависит лишь от h/d , оба способа совершенно эквивалентны.

8 Первый опыт Перегудова

Идея опыта. Исследовать зависимость взаимоиндукции от d при фиксированных l

и h . Предсказания при $d \rightarrow 0$

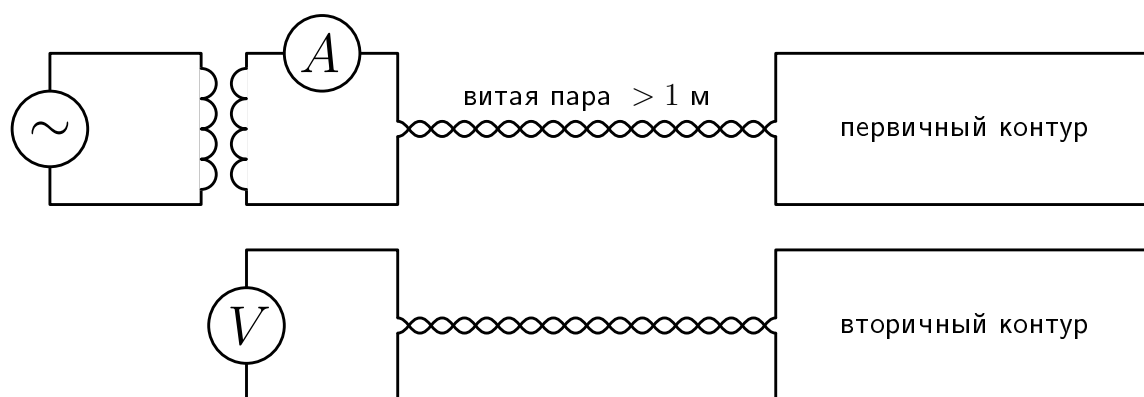
- 1-я, 2-я, 3-я формулы Ацюковского: $M \sim 1/d$
- электродинамика: $M \sim -\ln d$
- 4-я формула Ацюковского $M \sim 1$

Неизменные параметры эксперимента. $f = 10$ кГц, $I = 0.6$ А, $l = 1$ м, $h = 50$ мм, диаметр провода 0.4 мм.

Планирование эксперимента. Ожидаемые значения ЭДС индукции (согласно электродинамике Максвелла) — от 2 до 12 мВ. Оценки побочных факторов — см. ниже раздел “Оценки величин и рекомендации по проведению эксперимента”. Практически влиянием емкостной связи и падением напряжения на вторичном контуре можно пренебречь, если входное сопротивление вольтметра больше 1 кОм.

Использованное оборудование.

- генератор: ГЗ-109, диапазон частот 20 Гц–200 кГц, погрешность 1% (на 10 кГц), $\Delta f = 100$ Гц
- амперметр: класс точности 0.5, предел измерений 2 А, погрешность $\Delta I = 0.01$ А
- милливольтметр: ВЗ-38, входное сопротивление 4 МОм (входная емкость 25 пФ), класс точности 2.5, пределы измерений 10 и 30 мВ, погрешности соответственно $\Delta U = 0.25$ и 0.75 мВ
- воздушный трансформатор: первичная обмотка 800 витков провода ПЭВ 0.5 на каркасе диаметром 20 и длиной 32 мм (внешний диаметр намотки 37 мм), вторичная обмотка 100 витков провода ПЭВ 0.4 внавал
- рулетка, штангенциркуль



Определяемая величина. Приведенная взаимоиндукция

$$M^* = \frac{U}{\omega I} \frac{2\pi}{\mu_0 l}$$

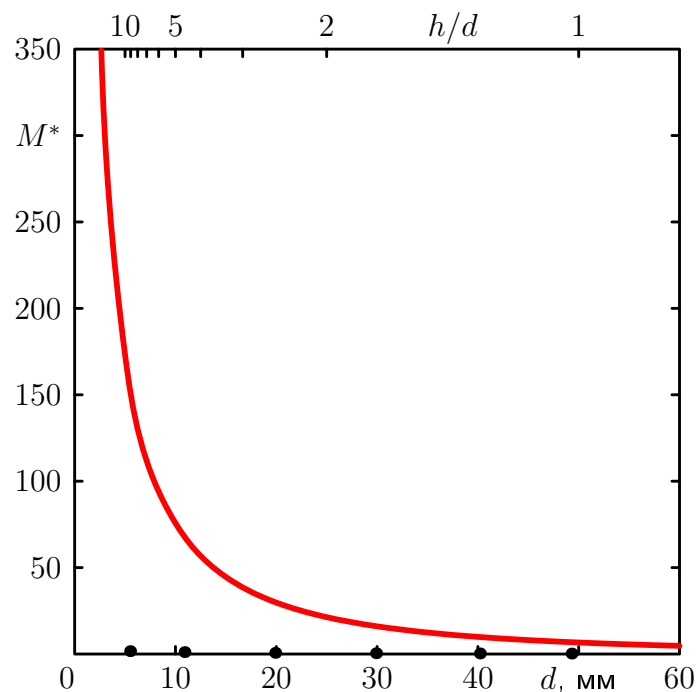
Погрешность определения

$$\Delta M^* = M^* \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2}.$$

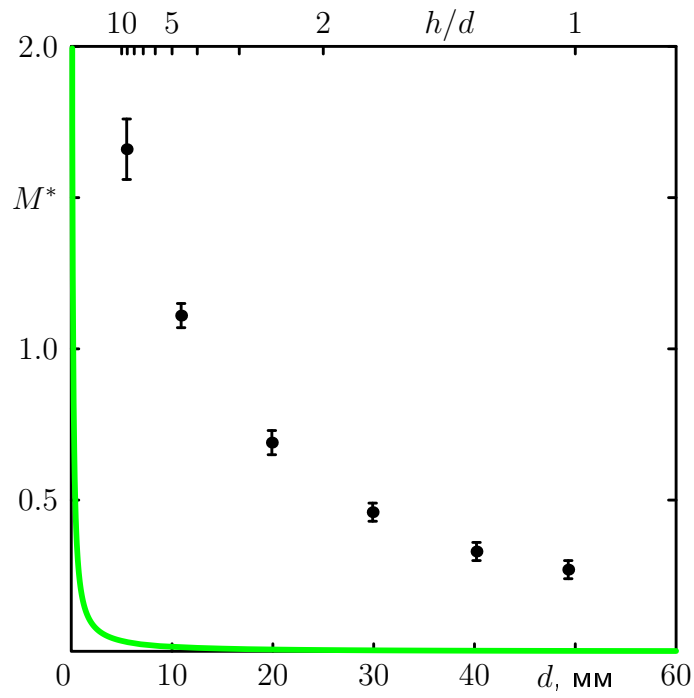
Результаты эксперимента.

d , мм	U , мВ	M^*	ΔM^*
49.3	2.0	0.27	0.03
40.2	2.5	0.33	0.03
29.9	3.5	0.46	0.03
19.9	5.2	0.69	0.04
10.9	8.4	1.11	0.04
5.5	12.5	1.66	0.10

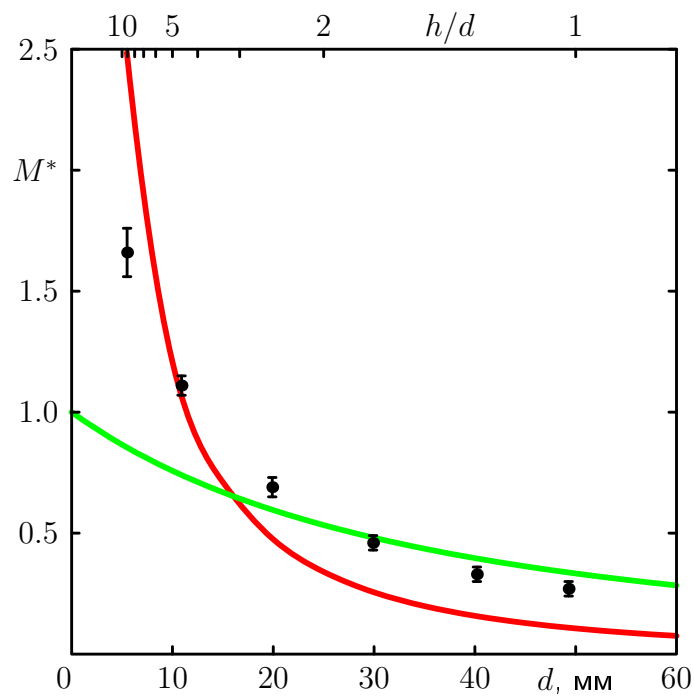
8.1 Сравнение с эфиродинамикой



● эксперимент; — 1-я формула Ацюковского;



эксперимент; 2-я формула Ацюковского

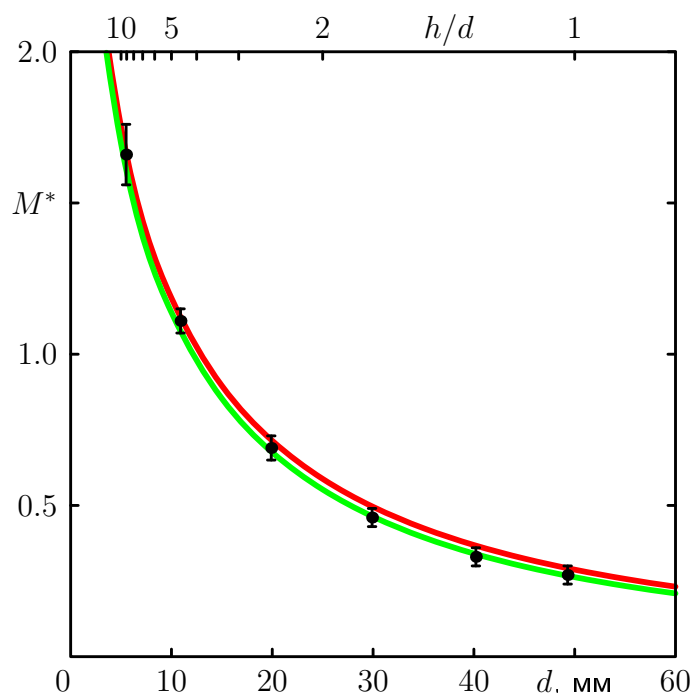





эксперимент; 3-я формула Ацюковского ($a = 15.94$ мм, наилучшая аппроксимация методом наименьших квадратов с учетом погрешности); 4-я формула Ацюковского

1-я и 2-я формулы Ацюковского откровенно “бьют в молоко”. Разница с экспериментом составляет два порядка.

3-я и 4-я формулы Ацюковского, являясь по сути подгоночными, правильно описывают порядок величин, но совершенно неправильно описывают характер зависимости, расхождение с экспериментом существенно больше погрешностей измерения.

8.2 Сравнение с электродинамикой Максвелла



 эксперимент;
  ф-ла для двухпроводных линий;
  ф-ла для прямоугольных рамок

Предсказания электродинамики Максвелла прекрасно подтверждаются

9 Второй опыт Перегудова

Идея опыта. Повторить первый эксперимент с проводом вторичного контура другого диаметра. 2-я формула Ацюковского предсказывает $M \sim R_{\text{пр}}$.

Неизменные параметры эксперимента. $f = 10$ кГц, $I = 0.6$ А, $l = 1$ м, $h = 50$ мм (те же, что в первом эксперименте), диаметр провода 0.75 мм (против 0.4 мм в первом опыте).

Результаты эксперимента.

d , мм	U , мВ	
	второй опыт	первый опыт
49.5	2.0	2.0
40.4	2.5	2.5
30.1	3.6	3.5
20.1	5.3	5.2
11.1	8.5	8.4
5.7	12.0	12.5

В пределах погрешности результат совпадает с результатом первого опыта.

9.1 Сравнение с эфиродинамикой

Согласно 2-й формуле Ацюковского взаимоиנדкция во втором эксперименте должна быть в $0.75/0.4 = 1.875$ раза (то есть почти в два раза) больше, чем в первом. Это предсказание опровергается.

9.2 Сравнение с электродинамикой Максвелла

Согласно электродинамике Максвелла, взаимоиנדкция не зависит от диаметра провода (пока он остается много меньше размеров контура). Это предсказание подтверждается.

10 Третий опыт Перегудова

Идея опыта. Исследование зависимости взаимоиנדкции от h при неизменных d и l в области $d \ll h \ll l$. Все формулы Ацюковского предсказывают насыщение взаимоиנדкции при больших h/d независимо от l , тогда как электродинамика предсказывает насыщение лишь при $h \gg l$, а при $h \ll l$ предсказывает логарифмический рост.

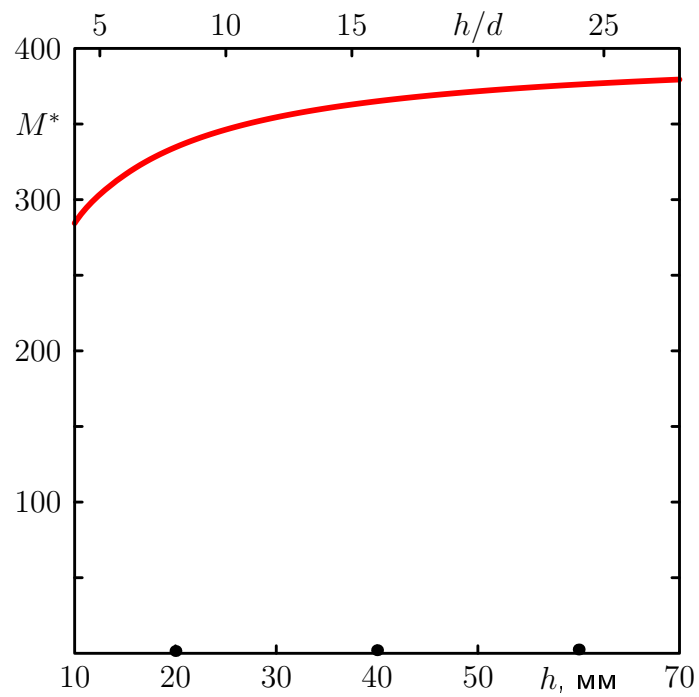
Неизменные параметры эксперимента. $f = 10$ кГц, $I = 0.6$ А, $l = 1.1$ м, $d = 2.5$ мм, диаметр провода 0.4 мм

Планирование эксперимента и использованное оборудование. То же, что в первом опыте.

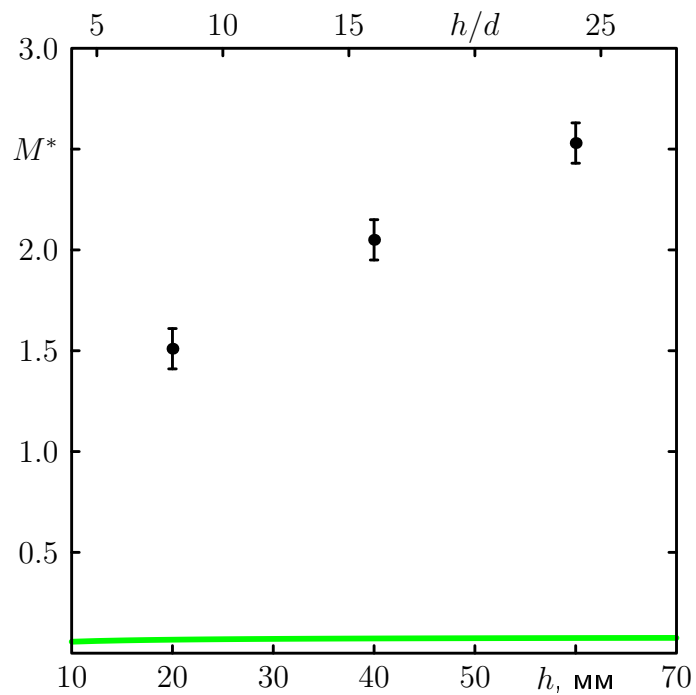
Результаты эксперимента.

h , мм	U , мВ	M^*	ΔM^*
20	12.5	1.51	0.10
40	17.0	2.05	0.10
60	21.0	2.53	0.10

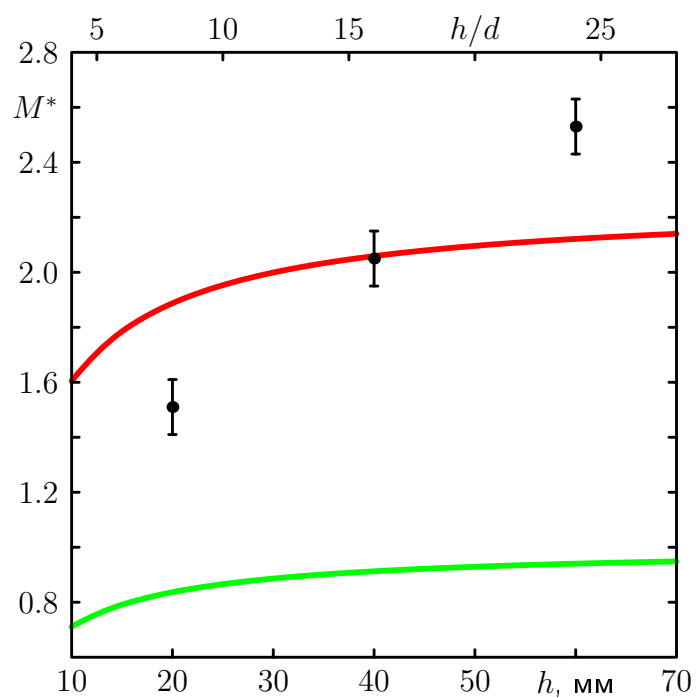
10.1 Сравнение с аэродинамикой



● эксперимент; — 1-я формула Адюковского



● эксперимент; — 2-я формула Ацюковского

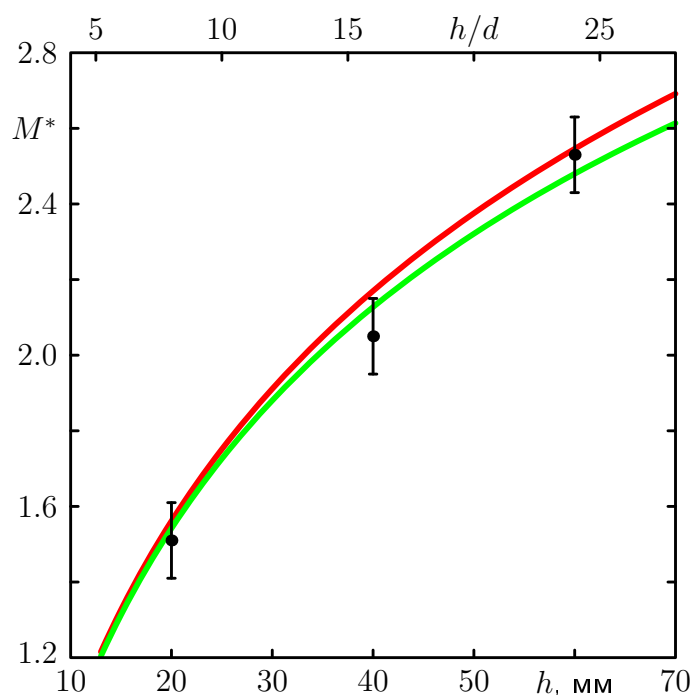


● эксперимент; — 3-я формула Ацюковского ($a = 5.64 \text{ мм}$, наилучшая аппроксимация методом наименьших квадратов с учетом погрешности); — 4-я формула Ацюковского

1-я и 2-я формулы Ацюковского откровенно “бьют в молоко”. Разница с экспериментом составляет два порядка для 1-й формулы и один порядок для 2-й.

3-я и 4-я формулы Ацюковского, являясь по сути подгоночными, правильно описывают порядок величин, но совершенно неправильно описывают характер зависимости, расхождение с экспериментом существенно больше погрешностей измерения. Наилучшее значение подгоночного параметра a ($a = 5.64$ мм) существенно отличается от такового для первого эксперимента ($a = 15.94$ мм).

10.2 Сравнение с электродинамикой Максвелла



● эксперимент; — ф-ла для двухпроводных линий; — ф-ла для прямоугольных рамок

Предсказания электродинамики Максвелла прекрасно подтверждаются

11 Первый опыт Цикры

Ссылка на оригинал.

<http://www.sciteclibrary.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?num=1411940184/91#91>

<http://www.sciteclibrary.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?num=1411940184/105#105>

Идея опыта. Превратно понятый первый опыт Перегудова. Были готовые рамки 33 на 25 см, одна из которых содержала 86, а вторая — 130 витков. Исследовалась

зависимость взаимной индукции от d при фиксированных l и h .

Неизменные параметры эксперимента. $f = 50$ Гц, $I = 0.5$ А, диаметр провода неизвестен, диаметр всей катушки примерно 0.5 и 0.7 см соответственно для 86- и 130-витковой рамки.

Планирование эксперимента. Не проводилось. Можно использовать оценки для первого опыта Перегудова, пересчитав соответственно изменившимся параметрам.

Использованное оборудование.

- генератор: бытовая сеть 50 Гц, через трансформатор с выходным напряжением около 10 В (для справки: по ГОСТ 13109–97 погрешность $\Delta f = 0.2$ Гц, коэффициент гармоник 5, 6 и 5% для 3-й, 5-й и 7-й гармоники)
- мультиметр DT9206 (для справки: нижний предел по напряжению 200 мВ, точность 1.2%; входное сопротивление 1 МОм; по току на пределе 20 А точность 3%)
- линейка (?)

Определяемая величина. Приведенная взаимная индукция на один виток

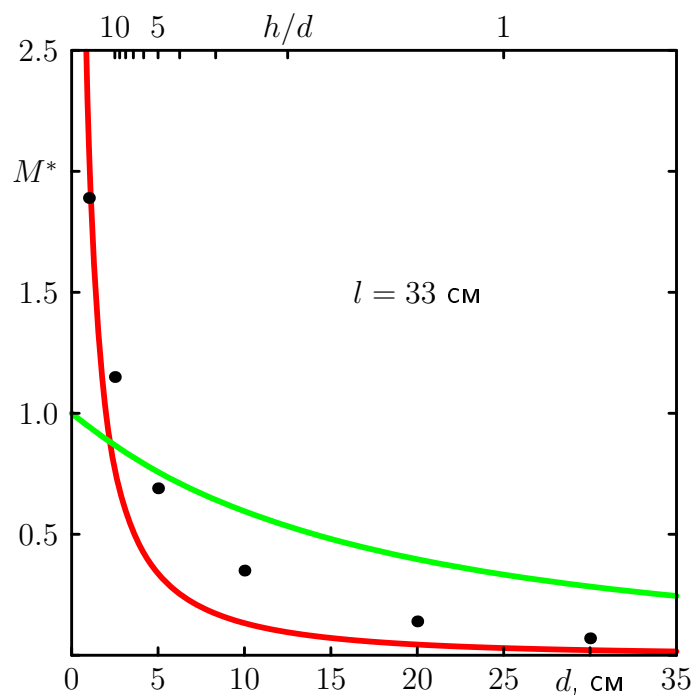
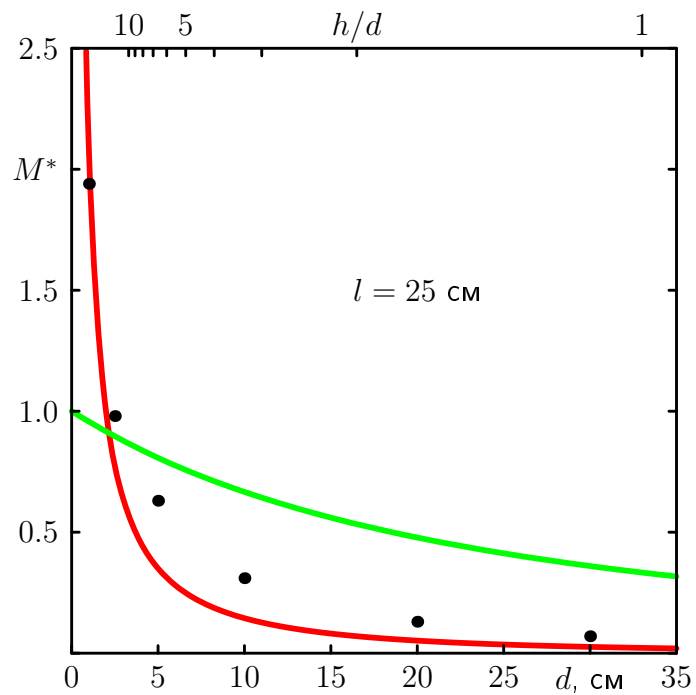
$$M^* = \frac{U}{\omega I} \frac{2\pi}{\mu_0 l} \frac{1}{N_1 N_2}, \quad N_1 = 86, \quad N_2 = 130$$

Результаты эксперимента.

d , см	U , мВ		M^*	
	$l = 25$ см	$l = 33$ см	$l = 25$ см	$l = 33$ см
1(?)	170	219	1.94	1.89
2.5	86	133	0.98	1.15
5*	55	80*	0.63	0.69
10	27	40	0.31	0.35
20	11	16	0.13	0.14
30	6	8	0.07	0.07

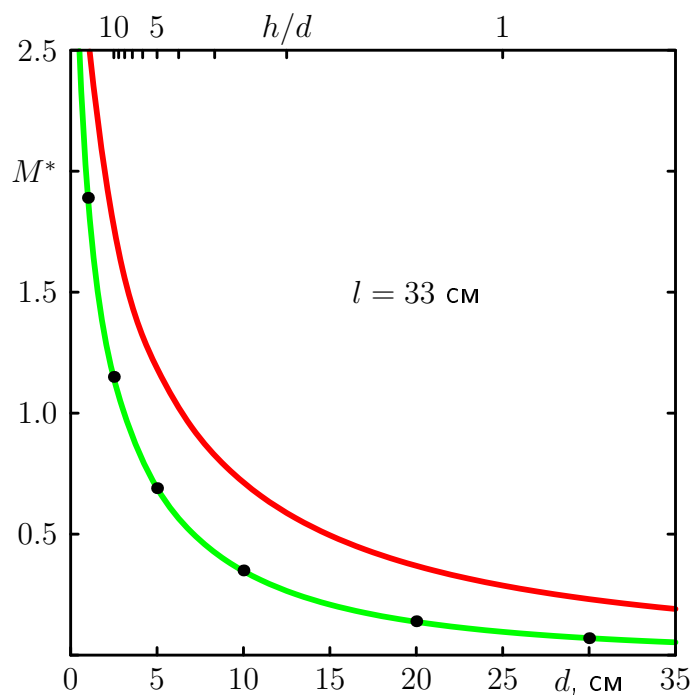
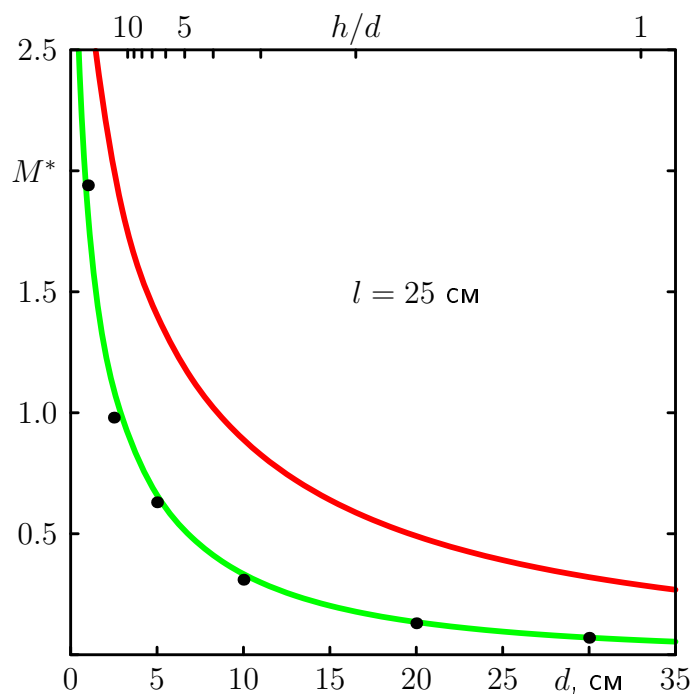
11.1 Сравнение с эфиродинамикой (условное)

Сравнение результатов опыта Цикры с эфиродинамикой названо условным по изложенным выше в разделе “Соображения размерности” причинам: фактически структура формул Ацюковского такова, что предполагает выполнение условия $d, h \ll l$, которое в опытах Цикры нарушается ($h \sim l$).



- эксперимент; — 3-я формула Ацюковского (наилучшее приближение методом наименьших квадратов без учета погрешности, $a = 2.17$ см для $l = 25$ см и $a = 2.23$ см для $l = 33$ см); — 4-я формула Ацюковского

11.2 Сравнение с электродинамикой Максвелла

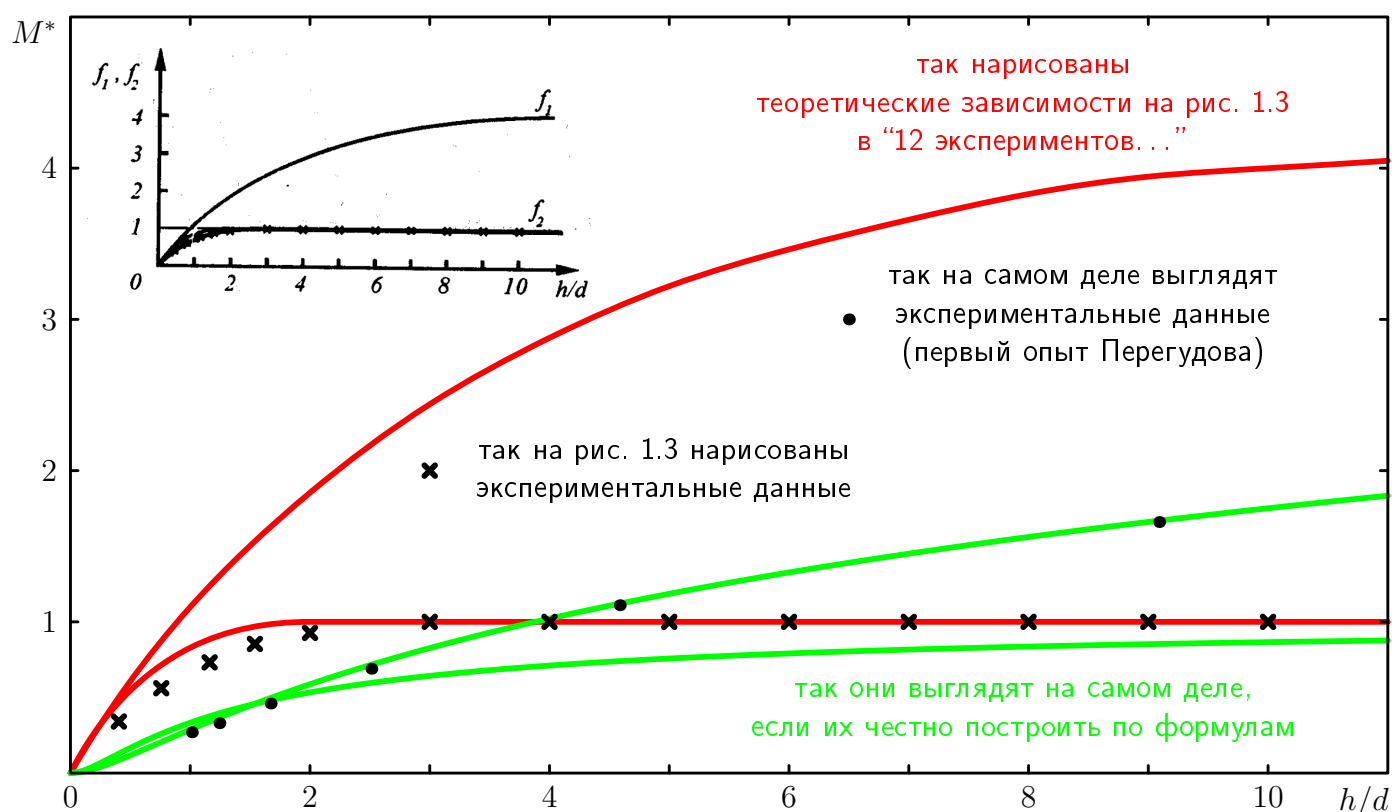


- эксперимент; — формула для двухпроводных линий (не работает при $h \sim l$);
- формула для прямоугольных рамок

Сравнение с формулой электродинамики Максвелла для прямоугольных рамок без-условное. Однако мы нанесли на картинку также и графики, соответствующие формуле для бесконечно длинных двухпроводных линий, хотя эта формула заведомо не работает для рамок с $h \sim l$. Что касается формулы для прямоугольных рамок, то она прекрасно подтверждается.

12 Абстрактная живопись

Теперь мы хотели бы вернуться к тому, что нарисовано на рис. 1.3 в книге “12 экспериментов...”



В левом верхнем углу приведенного рисунка воспроизведен рисунок 1.3. Поскольку в книгах Ацюковского он маленький и разглядеть на нем ничего нельзя, я перерисовал этот рисунок покрупнее. Красными линиями нарисованы графики, перенесенные один в один с рисунка Ацюковского. Крестиками нарисованы показанные на рисунке 1.3 экспериментальные данные.

Элементарная проверка, однако, показывает, что весь рисунок 1.3 является грубо намалеванной фальшивкой. Если честно построить графики функций по формулам (1.4) и (1.6) из книги “12 экспериментов...”, то они выглядят вовсе не как красные линии, а как зеленые линии. В частности, никакой “разницы в четыре раза”, о которой постоянно твердит Ацюковский, и в помине нет: разница настоящих, зеленых, кривых — менее, чем в два раза.

То же самое относится к экспериментальным данным. Если взять данные из первого опыта Перегудова (показаны жирными черными точками), то они прекрасно ложатся на предсказания электродинамики Максвелла (естественно, настоящие, зеленые, а не на красную фальшивку Ацюковского) и не имеют ничего общего с якобы “экспериментальными данными” Ацюковского.

13 Общие выводы

- Эфиродинамика: не подтверждается опытом
 - 1-я и 2-я формулы Ацюковского во всех случаях расходятся с экспериментом на один-два порядка
 - 3-я формула Ацюковского требует в разных случаях разных подгоночных множителей
 - 3-я и 4-я формулы Ацюковского, по существу являясь подгоночными, дают правильное представление о порядке величин (хотя и могут врать на порядки при соответствующей постановке эксперимента), но абсолютно неправильно предсказывают характер зависимости
 - рис. 1.3 из “12 экспериментов...” представляет собой пример абстрактной живописи: ни теоретические кривые, ни экспериментальные данные, изображенные на нем, не имеют никакого отношения к реальности
- Электродинамика Максвелла: подтверждается опытом
 - формула для прямоугольных рамок во всех случаях прекрасно согласуется с экспериментом
 - формула для двухпроводных линий согласуется с экспериментом в случаях $d, h \ll l$ (для которых только и была выведена) *независимо* от значения отношения h/d

14 О “дискусии” 16 декабря 2014 года

Два месяца спустя после “дебатов”, на “лекции” Ацюковского, посвященной “взаимоиндукции проводников” (на которой, однако, никаких новых данных, которые позволили бы ответить на вопросы, заданные еще 14 октября, озвучено не было), возникла дискуссия по поводу приведенной мной формулы (Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц “Теоретическая физика”: учебное пособие в 10-и томах. Т. VIII “Электродинамика сплошных сред”, М.: Наука, 1992, формула (33.11))

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Дискуссия эта носила довольно странный характер: по существу вопроса ничего сказано не было, зато альтеры с жаром обсуждали, была ли указанная книга опубликована до проведения “опытов Ацюковского”, или же после. Были высказаны две глубокие альтернативные мысли.

Первая состояла в том, что если некий “альтернативный учОный” пойдет в книжный магазин, возьмет с полки учебник математики для первого класса и не обнаружит там ни производных, ни интегралов, то он имеет полное право заявить, что производные и интегралы неизвестны науке (во как!) и, разумеется, тут же начать изобретать свой, альтернативный, матанализ. Логически развивая эту мысль, мы приходим к тому, что вообще никуда ходить и ничего читать не надо — что все альтеры и делают, — можно прямо сразу заявлять, что наука ни на что не способна, и начинать “лепить горбатого”.

Вторая мысль состояла в том, что если некий “альтернативный учОный” давно, лет 40 назад, при создании своей альтернативной теории не знал о каких-то достижениях “официальной науки” (а откуда бы он о них знал? — см. первую глубокую мысль), то он имеет полное право не только все эти 40 лет их игнорировать, но игнорировать и впредь. То есть главное — прокукарекать, а там хоть не рассветаи.

Разумеется, формула, в которую я ткнул Ацюковского носом, широко известна и появилась задолго до его рождения: она есть у Максвелла (1873), а он ссылается на Ампера (это уже 1820-е годы). Ниже приведены точные ссылки на “Трактат...” Максвелла, лекции Фейнмана и даже учебник по электротехнике, где эта формула присутствует.

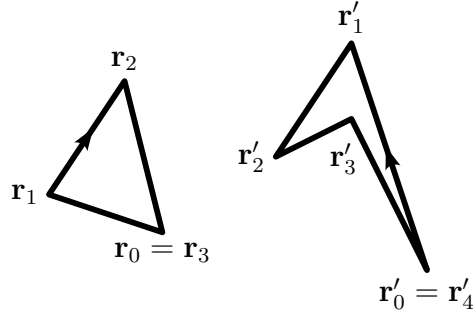
- Дж. К. Максвелл “Трактат об электричестве и магнетизме”, т. 2, М.: Наука, 1989, пункт 423, формула (16), см. также пп. 492, 493, 524, 584, 637, 701
- Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс “Фейнмановский лекции по физике”. Вып. 6 “Электродинамика”, М.: Мир, 1966, формула (17.30)
- “Теоретические основы электротехники”: учебник для электротехнических вузов в 2-х томах. Под редакцией проф. П. А. Ионкина. Т. II. “Нелинейные цепи и основы теории электромагнитного поля”, М.: Высшая школа, 1976, формула (29.26)

15 Взаимоиндукция произвольных полигональных контуров

Для обсуждения опытов Цикры с рамками в разных плоскостях нам нужны будут соответствующие предсказания электродинамики Максвелла. Во время первого доклада я упоминал, что можно получить общие формулы для взаимоиנדукции произвольных полигональных контуров. Ниже эти формулы приводятся. Детали вычислений вынесены в отдельный раздел “Расчет взаимоиנדукции произвольных полигональных контуров”.

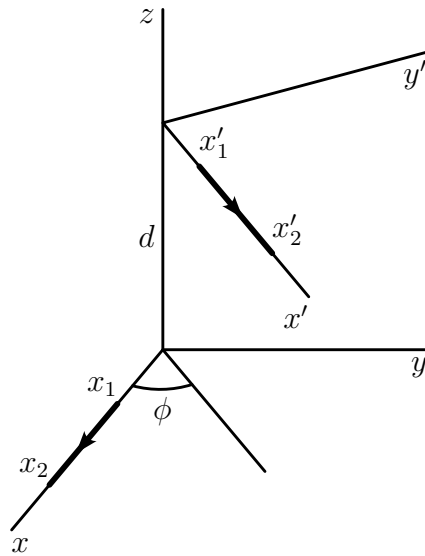
Взаимоиндукция представляется в виде суммы по парам сторон, одна из которых принадлежит первому контуру, а другая — второму

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n K(\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_i; \mathbf{r}'_{j-1}, \mathbf{r}'_j).$$



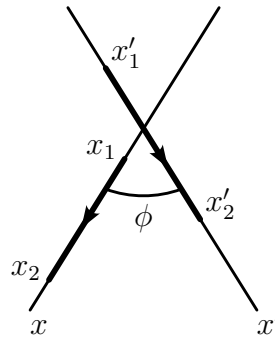
Вид функции K зависит от взаимного расположения сторон.

Общий случай $d \neq 0, \phi \neq 0, \pi$



$$K = \cos \phi \left[x' \ln(R + x - x' \cos \phi) + x \ln(R + x' - x \cos \phi) + \right. \\ \left. + \frac{2d}{\sin \phi} \operatorname{arctg} \frac{(R + x + x')(1 - \cos \phi)}{d \sin \phi} \right] \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Bigg|_{x'_1}^{x'_2}, \quad R^2 = x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \phi + d^2.$$

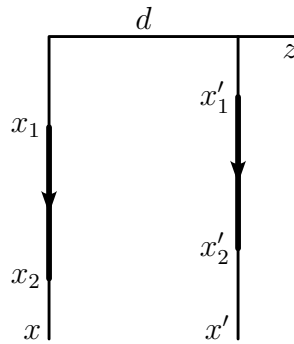
Плоский случай $d = 0, \phi \neq 0, \pi, x_{1,2} > 0$



$$K = \cos \phi [x' \ln(R + x - x' \cos \phi) + x \ln(R + x' - x \cos \phi)] \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{x_1}^{x'_1},$$

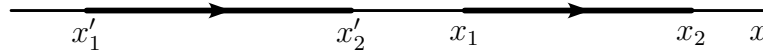
$$R^2 = x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \phi.$$

Параллельные стороны $d \neq 0, \phi = 0$



$$K = [(x' - x) \ln(R + x - x') + R] \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{x'_1}^{x'_2}, \quad R^2 = (x - x')^2 + d^2.$$

Отрезки на одной прямой $d = 0, \phi = 0, x_{1,2} > x'_{1,2}$



$$K = (x' - x) \ln(x - x') \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{x'_1}^{x'_2}.$$

16 Второй опыт Цикры

Ссылка на оригинал.

<http://www.sciteclibrary.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?num=1411940184/81#81>

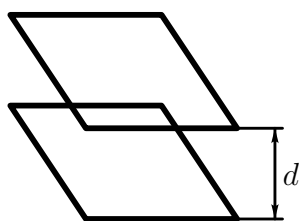
<http://www.sciteclibrary.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?num=1411940184/91#91>

Идея опыта. Исследование зависимости взаимной индукции прямоугольных рамок, лежащих в параллельных плоскостях друг над другом, от расстояния между плоскостями.

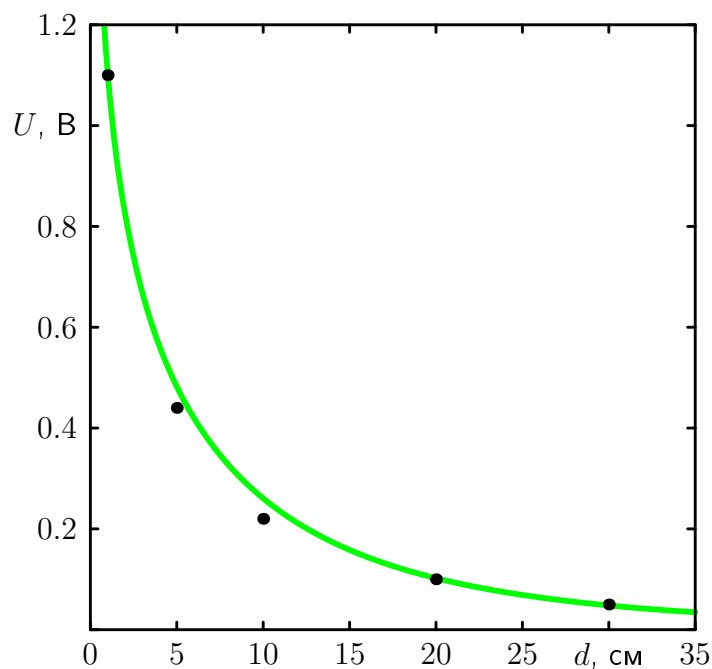
Неизменные параметры эксперимента. Рамки 33 на 25 см, 86 и 130 витков, $f = 50$ Гц, $I = 0.52$ А.

Результаты эксперимента.

d , см	U , мВ
1(?)	1100
5	440
10	220
20	100
30	50



16.1 Сравнение с электродинамикой Максвелла



• эксперимент; — формула для полигональных контуров

17 Третий опыт Цикры

Ссылка на оригинал.

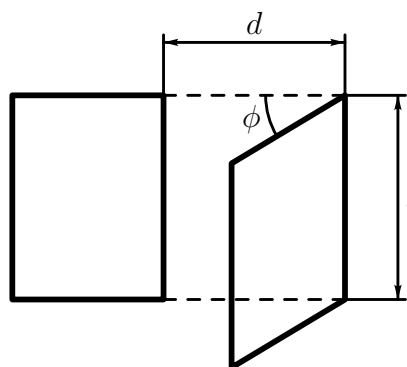
<http://www.sciteclibrary.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?num=1414850401/63#63>

Идея опыта. Исследование зависимости взаимной индукции прямоугольных рамок от угла между плоскостями, в которых лежат рамки.

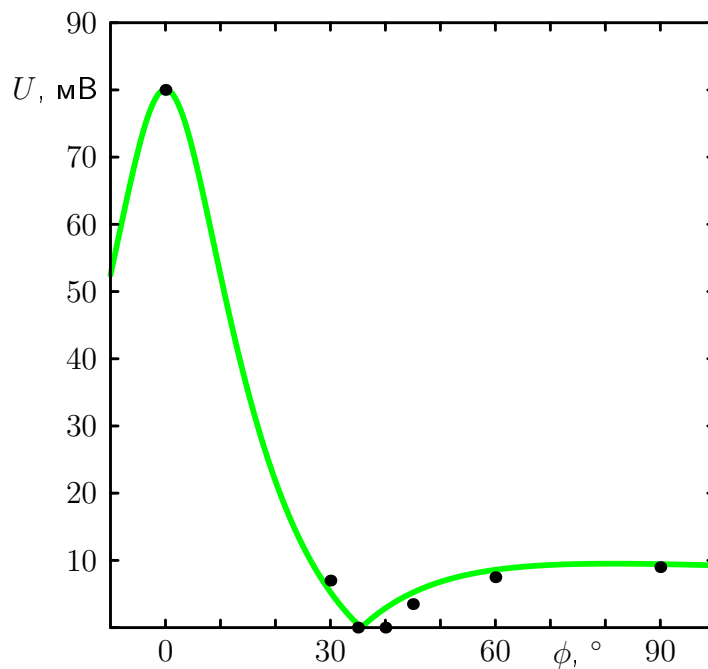
Неизменные параметры эксперимента. Рамки 33 на 25 см, 86 и 130 витков, $f = 50$ Гц, $I = 0.5$ А, параллельные стороны рамок $l = 33$ см, первая рамка неподвижна, вторая поворачивается вокруг стороны 33 см, лежащей в плоскости первой рамки и отстоящей от нее на $d = 30$ см.

Результаты эксперимента.

$\phi, ^\circ$	$U, \text{ мВ}$
0*	80*
30	7
35–40	0
45	3.5
60	7.5
90**	9.0**



17.1 Сравнение с электродинамикой Максвелла



● эксперимент; — формула для полигональных контуров

18 Четвертый опыт Цикры (дезавуирован самим автором)

Ссылка на оригинал.

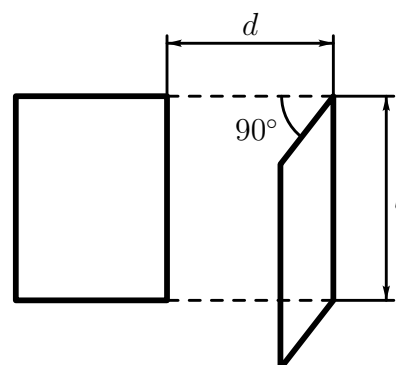
<http://www.sciteclibrary.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?num=1414850401/30#30>

Идея опыта. Исследование зависимости взаимной индукции прямоугольных рамок, лежащих в перпендикулярных плоскостях, от расстояния между их ближайшими сторонами.

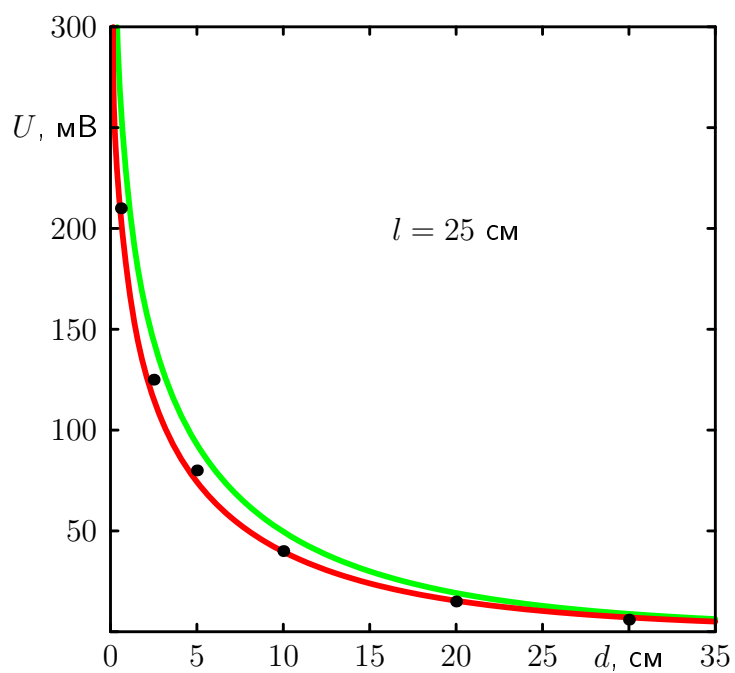
Неизменные параметры эксперимента. Рамки 33 на 25 см, 86 и 130 витков, $f = 50$ Гц, $I = 0.5$ А, параллельные стороны рамок $l = 33$ либо 25 см, первая рамка неподвижна, одна из сторон второй рамки лежит в плоскости первой рамки.

Результаты эксперимента.

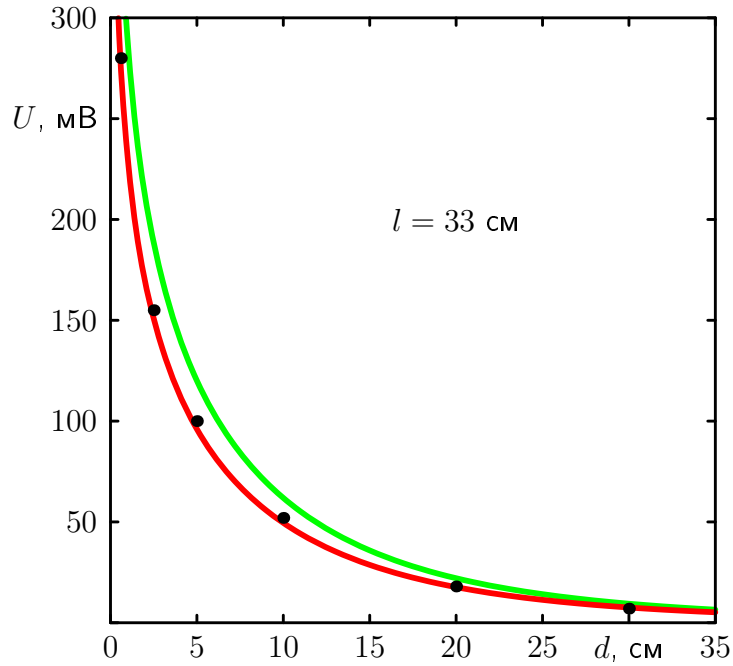
d , см	U , мВ	
	$l = 25$ см	$l = 33$ см
0.6	210	280
2.5	125	155
5	80	100
10	40	52
20	15	18
30**	6	7**



18.1 Сравнение с электродинамикой Максвелла



- эксперимент; — формула для полигональных контуров;
- $0.8 \times$ (формула для полигональных контуров)



- эксперимент; — формула для полигональных контуров;
- $0.8 \times$ (формула для полигональных контуров)

По поводу четвертого опыта Цикры нам хотелось бы сделать следующее замечание. Могло бы показаться, что его результаты достаточно хорошо ложатся на предсказания электродинамики Максвелла. Однако в действительности имеет место систематическое превышение примерно на 20%: экспериментальные данные гораздо лучше ложатся на красные, нежели на зеленые кривые. Причину такого расхождения для одного-единственного из проделанных опытов Цикра искать отказался. Однако, поскольку имеется несоответствие между измерениями третьего и четвертого опытов, соответствующих одной и той же физической ситуации (эти измерения помечены в таблицах измерений двойной звездочкой (**)), в то время как измерения первого и третьего опытов, помеченные одинарной звездочкой (*), напротив, хорошо согласуются друг с другом, то Цикра был вынужден признать результаты этого, четвертого, опыта неверными. Тем не менее, мне показалось полезным эти результаты привести.

19 Нормальная (аристотелева) vs альтернативная логика, Поппер и фальсифицируемость

Дискуссии с альтерами показали, что они весьма своеобразно “понимают”, что такое физическая теория.

Первым камнем преткновения является понимание того факта, что теория должна давать *конкретные* предсказания. Только конкретные предсказания могут быть проверены в эксперименте. Теория, не дающая конкретных предсказаний, не может

быть экспериментально проверена, а следовательно, является нефальсифицируемой, то есть ненаучной, представляя собой то ли религиозную, то ли философскую концепцию, но никак не научную теорию.

Фальсифицируема ли эфиродинамика?

<https://ru.wikipedia.org/wiki/Фальсифицируемость>

Вторым камнем преткновения является осознание того факта, что следствия теории должны быть логически связаны с ее основными положениями. У альтеров же наблюдается весьма альтернативная логика: основания теории у них сами по себе, а “выводы” — сами по себе и никак логически из оснований не вытекают. Понять, что выводы должны быть логическими следствиями оснований, а несоответствие выводов эксперименту логически приводит к необходимости корректировать (менять) основания, альтеры не в состоянии.

Нормальная логика

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$$

Если теория (A) дает предсказание (B),
которое опровергается экспериментом (\bar{B}),
то теория неверна (\bar{A})

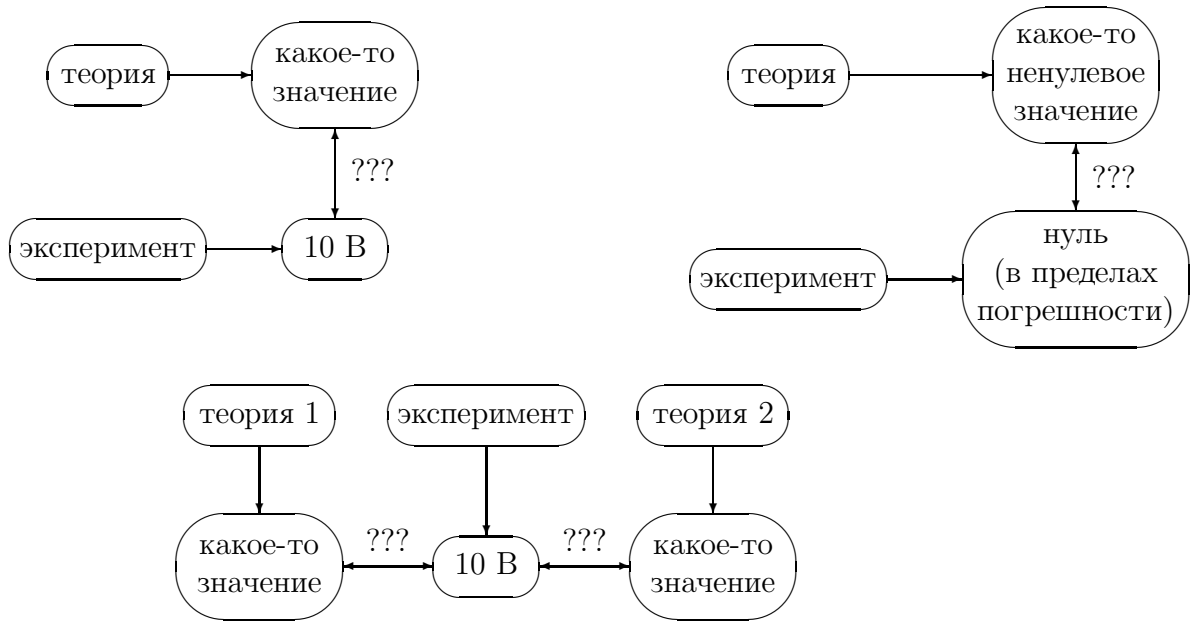
Альтернативная логика

???

20 Четыре вопроса к Ацюковскому

В книге “12 экспериментов по эфиродинамике” **отсутствуют** какие-либо **количественные** предсказания эфиродинамики (за исключением уже рассмотренного первого опыта). В таких условиях говорить о якобы имеющемся экспериментальном подтверждении эфиродинамики не представляется возможным. Для проведения проверочных экспериментов необходимо получить конкретные количественные предсказания.

Ниже в форме комикса я попытался наглядно показать, почему для экспериментальной проверки теории необходимы конкретные предсказания: отсутствие таких предсказаний не позволяет однозначно интерпретировать результаты эксперимента как в пользу теории (“эксперимент подтверждает теорию”), так и против нее (“теория опровергается экспериментом”).



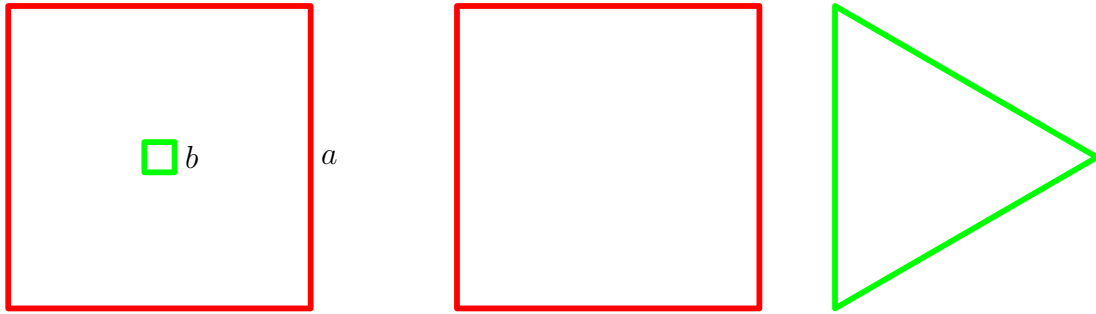
В подразделах 1–4 по мотивам первых “пяти экспериментов по эфиродинамике” сформулированы четыре задачи, которые нужно решить в рамках эфиродинамики, чтобы можно было говорить о ее экспериментальной проверке.

Если какая-то из этих задач будет решена в рамках эфиродинамики и дано конкретное предсказание для соответствующей физической ситуации, то я, со своей стороны, готов дать предсказание по электродинамике Максвелла, а также содействовать постановке эксперимента с тем, чтобы выяснить, какая из теорий соответствует опыту.

20.1 Вопрос первый: предсказать ЭДС индукции в случае, отличном от первого эксперимента

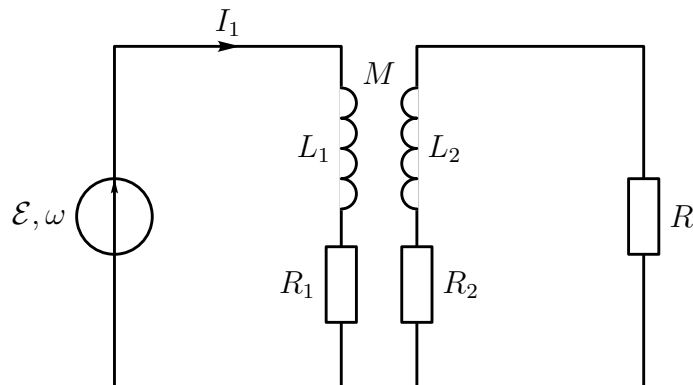
Предлагаемая задача. Первичный контур представляет собой квадрат со стороной a , по которому течет переменный ток I с частотой ω . Вторичный контур представляет собой квадрат со стороной $b \ll a$, расположенный в центре первичного контура. Рассчитать ЭДС индукции \mathcal{E} во вторичном контуре согласно эфиродинамическим представлениям в зависимости от a , b , I , ω .

Возможные варианты. Рассчитать ЭДС индукции для каких-нибудь других полигональных контуров, например, для лежащих в одной плоскости квадрата и правильного треугольника.

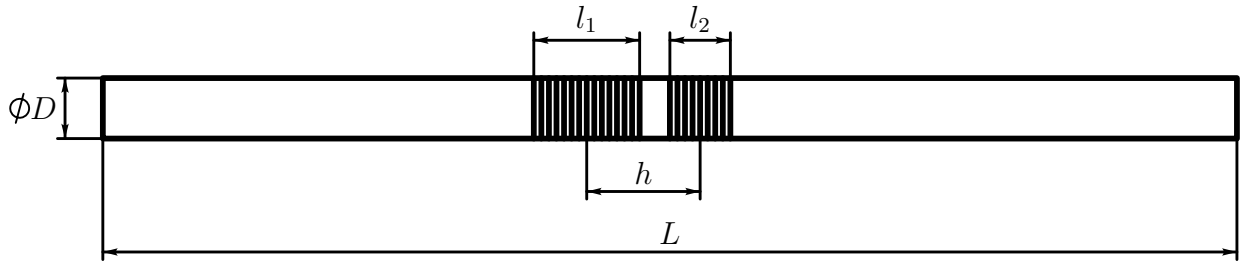


20.2 Вопрос второй: рассчитать работу трансформатора под нагрузкой

Предлагаемая задача. Трансформатор представляет собой первичную обмотку индуктивностью L_1 и активным сопротивлением R_1 и вторичную обмотку индуктивностью L_2 и активным сопротивлением R_2 , между которыми имеется взаимная индуктивность M . К первичной обмотке подключается источник переменного напряжения \mathcal{E} с частотой ω , а к вторичной — активное сопротивление нагрузки R . Рассчитать, согласно эфиродинамическим представлениям, ток I_1 (амплитуду и фазу) в первичной обмотке в зависимости от \mathcal{E} , ω , L_1 , L_2 , M , R_1 , R_2 , R . В целях упрощения расчетов рекомендуется рассмотреть случай $R \sim \omega L_{1,2} \gg R_{1,2}$.



Возможные варианты. Если эфиродинамика не умеет работать с электрическими схемами, а также для экспериментальной проверки предлагается конкретная конструкция трансформатора: две однослойные обмотки тонким проводом на цилиндрическом **немагнитном** сердечнике. Диаметр сердечника D , длина первичной обмотки l_1 , длина вторичной обмотки l_2 , диаметр провода обмоток $d \ll D, l_{1,2}$, расстояние между центрами обмоток $h > (l_1 + l_2)/2$. Рассчитать, согласно эфиродинамическим представлениям, ток I_1 (амплитуду и фазу) в первичной обмотке в зависимости от \mathcal{E} , ω , D , l_1 , l_2 , d , h , R .



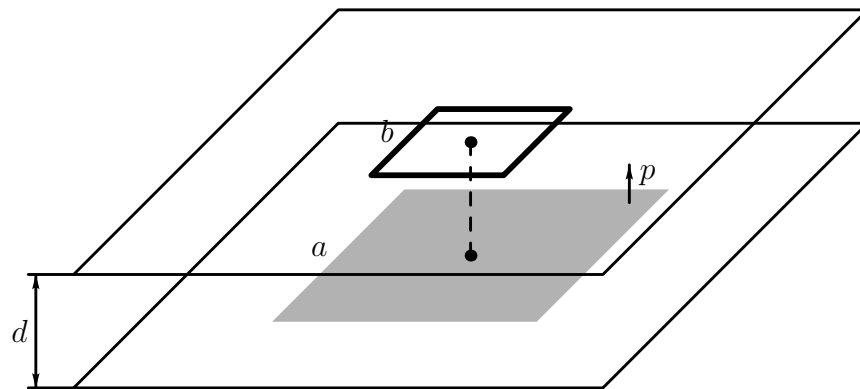
Если для эфиродинамики принципиально наличие **магнитного** сердечника, считать, что сердечник магнитный с проницаемостью μ . Длина сердечника $L \gg D, h, l_{1,2}$, а обмотки расположены в середине сердечника. Рассчитать, согласно эфиродинамическим представлениям, ток I_1 (амплитуду и фазу) в первичной обмотке в зависимости от $\mathcal{E}, \omega, D, L, \mu, l_1, l_2, d, h, R$.

20.3 Вопрос третий: рассчитать коэффициент трансформации в зависимости от расположения обмоток

Предлагаемая задача. Рассчитать коэффициент трансформации холостого хода цилиндрического трансформатора, представляющего собой две однослойные обмотки тонким проводом на длинном цилиндрическом магнитном сердечнике. Магнитная проницаемость сердечника μ , диаметр сердечника D , длина первичной обмотки l_1 , длина вторичной обмотки l_2 , расстояние между центрами обмоток $h > (l_1 + l_2)/2$, длина сердечника $L \gg D, h, l_{1,2}$, обмотки расположены в середине сердечника, диаметр провода обмоток $d \ll D, l_{1,2}$. К первичной обмотке подключается источник переменного напряжения \mathcal{E} и частоты ω , вторичная обмотка разомкнута. Рассчитать, согласно эфиродинамическим представлениям, отношение k напряжения на разомкнутой вторичной обмотке к напряжению \mathcal{E} на первичной (абсолютное значение и фазу) в зависимости от $\mathcal{E}, \omega, D, L, \mu, l_1, l_2, d, h$.

Возможные варианты. Вторичная обмотка нагружена активным сопротивлением R . Рассчитать, согласно эфиродинамическим представлениям, отношение k напряжения на нагрузке R к напряжению \mathcal{E} на первичной обмотке (абсолютное значение и фазу) в зависимости от $\mathcal{E}, \omega, D, L, \mu, l_1, l_2, d, h, R$.

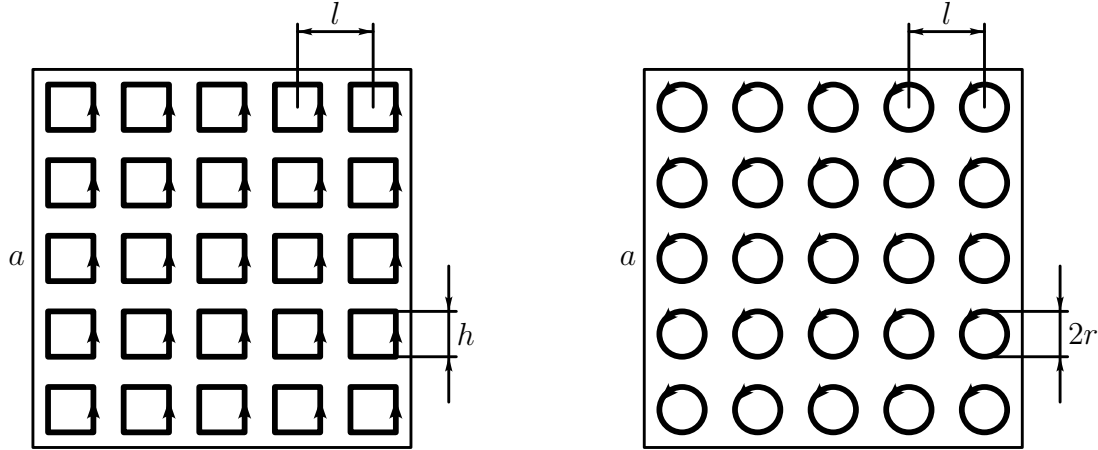
20.4 Вопрос четвертый: рассчитать ЭДС в контуре, расположенном над плоскостью с меняющейся намагниченностью



Предлагаемая задача. На горизонтальной плоскости расположен квадрат со стороной a , намагниченный с плотностью магнитного момента p (так что полный магнитный момент равен pa^2). Магнитный момент перпендикулярен плоскости и меняется по гармоническому закону с частотой ω . В параллельной плоскости, отстоящей на расстояние d , лежит квадратный измерительный контур со стороной b , центры квадратов находятся на одной вертикали. Рассчитать, согласно эфиродинамическим представлениям, ЭДС индукции в измерительной контуре в зависимости от a , p , ω , d , b .

Возможные варианты. Если эфиродинамика не умеет работать с магнитными моментами, а также для экспериментальной проверки предлагаются следующие конкретные модели намагниченного квадрата.

- Квадратный контур со стороной a и током $I = p$.
- Множество мелких квадратных контуров со стороной $h \ll a$ и расстоянием между центрами $l \ll a$, $l > h$, которые заполняют квадрат со стороной a и по которым текут токи $I = pl^2/h^2$.
- Множество мелких круговых контуров радиусом $r \ll a$ и расстоянием между центрами $l \ll a$, $l > 2r$, которые заполняют квадрат со стороной a и по которым текут токи $I = pl^2/\pi r^2$.



Радиусы всех проводов много меньше расстояния d между плоскостями. Рассчитать, согласно эфиродинамическим представлениям, ЭДС индукции в измерительном контуре в зависимости, соответственно, либо от a, I, ω, d, b , либо от a, I, h, l, ω, d, b , либо от a, I, r, l, ω, d, b .

21 Оценки величин и рекомендации по проведению эксперимента

Примем в качестве базовых те параметры, которые были указаны на стр. 18 прошлой презентации: $l = 1$ м, $h = 5$ см, $d = 0.5 \div 5$ см, $I = 1$ А, $f = 10$ кГц. Размеры контуров удовлетворяют условию $d, h \ll l$, которое Ацюковский использует в своих рассуждениях, хотя сам и не понимает этого. Также отношение $\omega l/c = 2 \cdot 10^{-4} \ll 1$, так что мы находимся глубоко в области квазистационарного приближения.

Все оценки будем делать по стандартной максвелловской электродинамике. Ожидаемая ЭДС на вторичном контуре равна $\mathcal{E} = \omega I M$, где взаимоиנדукция вычисляется по формуле для прямоугольных контуров (стр. 16 презентации)

$$M = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[g\left(\frac{d}{l}\right) + g\left(\frac{d+2h}{l}\right) - 2g\left(\frac{d+h}{l}\right) \right],$$

$$g(x) = 2\sqrt{x^2+1} + x \ln x + \frac{x}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}.$$

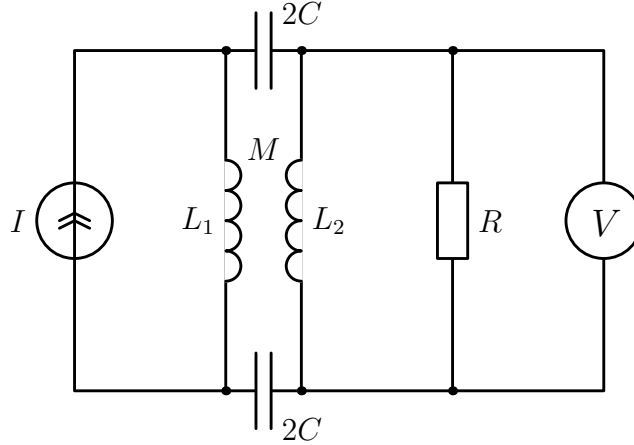
Для характерных значений $d = 5, 1, 0.5$ см получим значения ЭДС 3.3 мВ, 14.3 мВ, 21.3 мВ.

Поскольку вопрос с множителем в формуле Ацюковского

$$M \sim \frac{l}{d} \left(1 + \frac{d}{d+2h} - \frac{2d}{d+h} \right)$$

остается неясным, то по эфиродинамике невозможно предсказать абсолютных значений ЭДС, но можно предсказать отношения ЭДС при разных значениях d . Если

считать, что при $d = 5$ см предсказания электродинамики и эфиродинамики совпадают, то получаем такие значения ЭДС для $d = 5, 1, 0.5$ см: ЭДС равна 3.3 мВ, 37.5 мВ, 97.5 мВ. Как видно предсказания электродинамики и эфиродинамики по мере уменьшения d все больше расходятся.



Оценим побочные факторы, искажающие результат измерений. Таких факторов два: наличие реактивного (обусловленного самоиндукцией) и активного сопротивлений контуров и наличие емкостной связи между ними. Соответствующая эквивалентная схема приведена на стр. 12 презентации, там же приведено напряжение, измеряемое на нагрузке, включенной во вторичный контур

$$U = \frac{Z_M R + \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_C} R}{R + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2 + (Z_1 + Z_2 - 2Z_M) R}{Z_C}} I.$$

Здесь $Z_{1,2} = i\omega L_{1,2}$, $Z_M = i\omega M$, $Z_C = 1/i\omega C$. Из формулы видно, что, если в числителе и в знаменателе существенны лишь первые слагаемые, то измеренное на нагрузке напряжение равно ЭДС индукции

$$U \approx Z_M I = i\omega M I.$$

Самоиндукцию контура можно оценить с помощью формулы, аналогичной формуле для взаимной индукции

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[(l-r)g\left(\frac{h-r}{l-r}\right) + rg(1) - rg\left(\frac{h-r}{r}\right) - (l-r)g\left(\frac{r}{l-r}\right) \right].$$

Здесь r — радиус провода. Примем $r = 0.25$ мм, тогда индуктивность контура $L = 1.0$ мкГн, а его реактивное сопротивление $Z_{1,2} = 0.063$ Ом.

Основную часть взаимной емкости контуров создают два ближних провода, ее можно оценить по формуле

$$C = \frac{\pi \epsilon_0 l}{\ln(d/r)}.$$

Для $d = 0.5$ см и $d = 5$ см (максимальное и минимальное значения) получаем 9.3 пФ и 5.3 пФ. Соответственно реактивное сопротивление Z_C меняется от 1.7 МОм до 3.0 МОм.

Взаимоиндукция уже фактически оценена нами, когда мы вычисляли ЭДС во вторичном контуре. Она меняется от 0.053 мкГн до 0.34 мкГн, а реактивное сопротивление Z_M — от 0.0033 Ом до 0.021 Ом.

Активное сопротивление контура оценивается по формуле

$$R_0 = 2(l + h)\rho/\pi r^2$$

(для меди $\rho = 0.018$ Ом · мм²/м) и составляет 0.19 Ом. Отметим, что толщина скин-слоя

$$\Delta = \sqrt{2\rho/\mu_0\omega}$$

на частоте 10 кГц равна $\Delta = 0.68$ мм, что больше радиуса провода, так что можно считать ток распределенным по всему сечению.

Если включить во вторичный контур сопротивление нагрузки $R = 1$ кОм, то поправочные члены в формуле для U оказываются малы (числовые значения приведены для $d = 0.5$ см, порядки величин от d не зависят)

$$U = \frac{21 + 2.1 \cdot 10^{-6}}{10^3 + 0.063 + 4.9 \cdot 10^{-5}}.$$

Нужно только проследить, чтобы входное сопротивление измерительного прибора, подключаемого параллельно нагрузке, было не менее 1 кОм, при этом его показания будут фактически равны ЭДС, наводимой во вторичном контуре.

Несколько слов про возможные вариации параметров. Если значения ЭДС в несколько милливольт представляются слишком малыми для надежного измерения с приемлемой точностью, можно попытаться их увеличить. Увеличение тока в первичном контуре вряд ли возможно, поскольку сечение выбранного провода составляет лишь 0.2 кв. мм, но можно в 10 раз (до 100 кГц) увеличить частоту. При этом ЭДС также возрастет в 10 раз. Сделанные выше оценки сохраняют свою силу. Мы все еще остаемся глубоко в области квазистационарного приближения. Хотя реактивные сопротивления контуров растут в 10 раз, а реактивное сопротивление паразитной емкости падает в 10 раз, поправки в формуле для U остаются малыми. Толщина скин-слоя падает до 0.21 мм, но все еще остается порядка радиуса провода, так что оценка активного сопротивления контура остается в силе. Альтернативно, если проблемы с фиксацией низких напряжений нет, можно увеличить частоту, чтобы пропорционально уменьшить ток в первичном контуре.

О практической реализации. Поскольку геометрия контуров не меняется, удобно натянуть их на деревянные рамки, например, полосы, отрезанные от толстой фанеры (10 мм) или тонкой доски (вагонка). Фиксировать на определенном расстоянии можно при помощи двух деревянных прокладок надлежащей толщины и двух стягивающих резинок. Подвод к первичному контуру выполнить из того же провода, скрутив его в витую пару. Во вторичном контуре расположить сопротивление нагрузки как можно ближе к самому контуру. Разумеется, поблизости от контуров не должно быть магнитных предметов, в том числе следует отнести на достаточное расстояние (порядка

метра) генератор. Ацюковский говорил, что питать первичный контур (при токе 1 А) приходится через трансформатор, это лучше уточнить у него, если он помнит. Ток измерять непосредственно в первичном контуре (после трансформатора), чтобы исключить какой-либо пересчет. Использовать генератор синусоидальных сигналов, так как высшие гармоники будут вносить искажения в ЭДС. Вроде все.

P. S. Уменьшать d меньше 0.5 см нецелесообразно, так как при этом будут уже проявляться поправки, связанные с конечным диаметром (0.5 мм) проводов. Я бы рекомендовал провести измерения при $d = 5, 4, 3, 2, 1, 0.5$ см.

22 О проведении опытов Перегудова

Опыты проводились в учебной лаборатории кафедры физики МИРЭА. Лаборатория располагает соответствующим оборудованием, в частности, генераторами синусоидальных сигналов и милливольтметрами. Одна из предлагаемых студентам лабораторных работ состоит в изучении изменения взаимной индукции двух коаксиальных катушек при смещении одной из них вдоль общей оси.

Для проведения опытов были изготовлены две экспериментальные установки. Первая представляла собой две выпиленные из обрезков вагонки полосы размером 5 см на 1 м, по торцу которых был пущен провод ПЭВ. Провод был плотно натянут на деревянные полосы, концы провода были скручены между собой и переходили в витую пару, выполненную из того же провода. Для фиксации полученных контуров на определенном расстоянии использовались пары деревянных прокладок, выпиленных из той же вагонки. Всего было изготовлено шесть пар, ширинами примерно 5, 4, 3, 2, 1 и 0.5 см (фактические ширины измерялись штангенциркулем). Прокладки вставлялись между полосами, вся конструкция стягивалась двумя резинками. На фотографиях показан общий вид первой экспериментальной установки.

http://sto68.narod.ru/figs/IMG_2994.jpg

http://sto68.narod.ru/figs/IMG_2995.jpg

Вторая экспериментальная установка представляла собой отрезок доски сечением 150 на 25 мм и длиной 120 см. Вблизи концов перпендикулярно доске на глубину 1 см были сделаны два пропила циркуляркой. В эти пропилы были вставлены спички, на которые натягивался провод ПЭВ. Как и в первой экспериментальной установке концы провода скручивались и переходили в витую пару. Для надежной фиксации спичек в пропилы были дополнительно вставлены полоски тонкого пластика. Таким образом, располагая спички в надлежащих местах пропилов, можно было располагать проводники контуров на произвольных расстояниях друг от друга, ограниченных лишь толщиной спичек и поперечным размером доски. Практически расстояние между ближними сторонами контуров было фиксировано и равно 2.5 мм (толщина спички плюс диаметр провода), а внешние стороны разводились на расстояния 60, 40 и 20 мм от ближних сторон. Пропилы были сделаны на таком расстоянии друг от друга, что длина параллельных сторон контуров составляла 110 см. При перестановке спичек контуры каждый раз натягивались заново. Общий вид второй экспериментальной установки показан на фотографиях.

http://sto68.narod.ru/figs/IMG_2996.jpg

http://sto68.narod.ru/figs/IMG_2997.jpg

Для питания первичного контура был изготовлен воздушный трансформатор. Была использована готовая катушка из 800 витков провода ПЭВ 0.5 мм на каркасе диаметром 20 и длиной 32 мм (внешний диаметр намотки составлял 37 мм). Сверху на нее внавал был намотан провод ПЭВ 0.4 мм. Экспериментально было определено, что наибольший ток короткого замыкания на частоте 10 кГц получается при использовании положения переключателя 600 Ом на генераторе ГЗ-109 и 100 витках вторичной обмотки, он был равен примерно 0.7 А. Внешний вид трансформатора показан на фотографии.

http://sto68.narod.ru/figs/IMG_2998.jpg

Экспериментальная установка располагалась на большом (длиной около 2 м) деревянном столе, в котором полностью отсутствовали какие-либо металлические детали. Вся аппаратура (генератор, трансформатор, амперметр и милливольтметр) располагалась на отдельном столе, к ней от экспериментальной установки шли две витые пары длиной около 1 м.

23 Расчет взаимной индукции произвольных полигональных контуров (первый способ)

Расчет взаимной индукции произвольных полигональных контуров сводится к расчету двойного интеграла по одной из пар сторон

$$K = \cos \phi \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{x'_1}^{x'_2} dx' \frac{1}{\sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \phi + d^2}}.$$

Для вычисления интеграла по x можно воспользоваться формулой

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right).$$

Мы найдем

$$K = \cos \phi \int_{x'_1}^{x'_2} dx' \ln \left(\sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \phi + d^2} + x - x' \cos \phi \right) \Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Удобно не совершать подстановку пределов по x немедленно, а сперва проинтегрировать по x' . Для этого представим подкоренное выражение в виде суммы квадратов

$$x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \phi + d^2 = \xi^2 + \alpha^2, \quad \xi = x' - x \cos \phi, \quad \alpha^2 = x^2 \sin^2 \phi + d^2$$

и перейдем к новой переменной интегрирования z

$$\xi = \frac{\alpha}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

Интеграл приобретает вид (пределов и подстановки не пишем)

$$K = \cos \phi \int \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) dz \ln \left[\frac{\alpha}{2} \frac{1 - \cos \phi}{z} \left(z^2 - \frac{2x \sin^2 \phi}{\alpha(1 - \cos \phi)} z + \frac{1 + \cos \phi}{1 - \cos \phi} \right) \right].$$

Квадратный трехчлен под логарифмом может быть разложен на множители $(z - z_1)(z - z_2)$, где

$$z_{1,2} = \frac{-x \sin^2 \phi \pm id \sin \phi}{\alpha(1 - \cos \phi)},$$

после чего интеграл можно вычислить при помощи формул

$$\int \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \ln z dz = \left(z - \frac{1}{z}\right) \ln z - z - \frac{1}{z},$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \ln(z - z_1) dz = \left(z - \frac{1}{z}\right) \ln(z - z_1) - z - \left(z_1 - \frac{1}{z_1}\right) \ln(z - z_1) - \frac{1}{z_1} \ln z.$$

Утомительные, но элементарные алгебраические преобразования (с одновременным отбрасыванием слагаемых, зависящих только от x либо только от x' — такие члены все равно сократятся при подстановке) приводят к результату

$$K = \cos \phi \left[x' \ln(R + x - x' \cos \phi) + x \ln(R + x' - x \cos \phi) + \frac{2d}{\sin \phi} \operatorname{arctg} \frac{(R + x + x')(1 - \cos \phi)}{d \sin \phi} \right] \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{x'_1}^{x'_2}, \quad R^2 = x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \phi + d^2.$$

Общее выражение приводит к неопределенностям при $\phi \rightarrow 0$ или $d \rightarrow 0$. Нужно раскрыть эти неопределенности по правилам матанализа. Для $\phi \rightarrow 0$ пользуемся формулами

$$\sin \phi = \phi + \dots, \quad \cos \phi = 1 - \phi^2/2 + \dots, \quad \phi \rightarrow 0,$$

$$\operatorname{arctg} x = x + \dots, \quad x \rightarrow 0,$$

откуда получаем

$$K = [x' \ln(R + x - x') + x \ln(R + x' - x) + R + x + x'] \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{x'_1}^{x'_2} =$$

$$= [(x' - x) \ln(R + x - x') + R + x \ln d^2 + x + x'] \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{x'_1}^{x'_2} =$$

$$= [(x' - x) \ln(R + x - x') + R] \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{x'_1}^{x'_2}, \quad R^2 = (x - x')^2 + d^2.$$

В последнем выражении отброшены слагаемые, зависящие только от x или только от x' , такие члены все равно сокращаются при подстановках. Нетрудно видеть, что аргумент логарифма всегда положителен при $d \neq 0$.

Для случая $d \rightarrow 0$ пользуемся пределом

$$\operatorname{arctg} x = \pi/2 + \dots, \quad x \rightarrow \infty,$$

тогда

$$K = \cos \phi [x' \ln(R + x - x' \cos \phi) + x \ln(R + x' - x \cos \phi)] \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{x'_1}^{x'_2}, \quad R^2 = x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \phi.$$

Поскольку

$$R^2 = (x - x' \cos \phi) + (x' \sin \phi)^2 = (x' - x \cos \phi)^2 + (x \sin \phi)^2,$$

то при $x \neq 0$, $x' \neq 0$ аргументы логарифмов положительны. Нетрудно видеть, что при непересекающихся отрезках по крайней мере одна из пар $x_{1,2}$ либо $x'_{1,2}$ может быть выбрана положительной. Пусть для определенности $x_{1,2} > 0$. Тогда нетрудно убедиться, что аргументы логарифма положительны и в случае $x'_{1 \text{ or } 2} = 0$.

Наконец, рассмотрим случай $\phi = 0$, $d = 0$ (отрезки на одной прямой). К нему проще всего перейти от случая $\phi = 0$, $d \neq 0$, учитывая, что для непересекающихся отрезков всегда можно считать $x_{1,2} > x'_{1,2}$, то есть разность $(x - x')$ всегда положительна. Получаем

$$\begin{aligned} K &= [(x' - x) \ln(|x - x'| + x - x') + |x - x'|] \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{x'_1}^{x'_2} = \\ &= [(x' - x) \ln(x - x') + (x - x')(1 - \ln 2)] \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{x'_1}^{x'_2} = (x' - x) \ln(x - x') \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{x'_1}^{x'_2}. \end{aligned}$$

В последнем выражении опущены слагаемые, зависящие только от x либо только от x' .

24 Расчет взаимной индукции произвольных полигональных контуров (второй способ)

Рассмотрим два полигональных контура, вершины которых находятся в точках $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$ и $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m = \mathbf{y}_0$ соответственно. Из общей формулы взаимной индукции контуров

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{d\mathbf{x} d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

очевидно, что взаимная индукция выражается двойной суммой по сторонам контуров

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m K(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i; \mathbf{y}_{j-1}, \mathbf{y}_j),$$

где

$$K(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \int_{ab} \int_{cd} \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

— интеграл по одной из пар сторон ab и cd . Оказывается, этот интеграл можно вычислить в элементарных функциях в общем виде при любой взаимной ориентации сторон.

Для фактического вычисления введем параметры t и s , пробегающие значения от 0 до 1, через которые радиус-векторы выражаются согласно

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}(1 - t) + \mathbf{b}t, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{c}(1 - s) + \mathbf{d}s,$$

их разность равна

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{ab}t - \mathbf{r}_{cd}s + \mathbf{r}_{ca},$$

интеграл же приобретает вид

$$K = (\mathbf{r}_{ab})(\mathbf{r}_{cd}) \int_0^1 ds \int_0^1 dt \frac{1}{|\mathbf{r}_{ab}t - \mathbf{r}_{cd}s + \mathbf{r}_{ca}|},$$

где $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\mathbf{r}_{cd} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$, $\mathbf{r}_{ca} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$. Квадрат $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ равен

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 = r_{ab}^2 t^2 + r_{cd}^2 s^2 - 2(\mathbf{r}_{ab}\mathbf{r}_{cd})ts + 2(\mathbf{r}_{ab}\mathbf{r}_{ca})t - 2(\mathbf{r}_{cd}\mathbf{r}_{ca})s + r_{ca}^2,$$

а для вычисления интеграла по t можно воспользоваться формулой

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right).$$

Мы найдем

$$K = (\mathbf{n}_{ab}\mathbf{r}_{cd}) \int_0^1 ds \ln(|\mathbf{r}_{ab}t - \mathbf{r}_{cd}s + \mathbf{r}_{ca}| + \mathbf{n}_{ab}(\mathbf{r}_{ab}t - \mathbf{r}_{cd}s + \mathbf{r}_{ca})) \Big|_0^1,$$

где $\mathbf{n}_{ab} = \mathbf{r}_{ab}/r_{ab}$. Удобно не совершать подстановки пределов по t немедленно, а сперва проинтегрировать по s . Для этого представим квадрат $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ в виде суммы двух квадратов

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_{ab}t - \mathbf{r}_{cd}s + \mathbf{r}_{ca})^2 &= \xi^2 + \alpha^2, \\ \xi &= -\mathbf{n}_{cd}(\mathbf{r}_{ab}t - \mathbf{r}_{cd}s + \mathbf{r}_{ca}), \quad \alpha = \mathbf{n}_{cd} \times (\mathbf{r}_{ab}t - \mathbf{r}_{cd}s + \mathbf{r}_{ca}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{n}_{cd} = \mathbf{r}_{cd}/r_{cd}$, и перейдем к новой переменной интегрирования z

$$\xi = \frac{\alpha}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

Интеграл приобретает вид (пределов и подстановки не пишем)

$$\begin{aligned} K &= (\mathbf{n}_{ab}\mathbf{n}_{cd}) \int \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2} \right) dz \times \\ &\quad \times \ln \left[\frac{\alpha}{2} \frac{1 - (\mathbf{n}_{ab}\mathbf{n}_{cd})}{z} \left(z^2 - \frac{2\mathbf{n}_\alpha(\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{n}_{cd})}{1 - (\mathbf{n}_{ab}\mathbf{n}_{cd})} z + \frac{1 + (\mathbf{n}_{ab}\mathbf{n}_{cd})}{1 - (\mathbf{n}_{ab}\mathbf{n}_{cd})} \right) \right], \end{aligned}$$

где $\mathbf{n}_\alpha = \alpha/\alpha$. Квадратный трехчлен под логарифмом может быть разложен на множители $(z - z_1)(z - z_2)$, где

$$z_{1,2} = \frac{\mathbf{n}_\alpha(\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{n}_{cd} \pm i\mathbf{n}_{ab})}{1 - (\mathbf{n}_{ab}\mathbf{n}_{cd})},$$

после чего интеграл можно вычислить при помощи формул

$$\begin{aligned} \int \left(1 + \frac{1}{z^2} \right) \ln z dz &= \left(z - \frac{1}{z} \right) \ln z - z - \frac{1}{z}, \\ \int \left(1 + \frac{1}{z^2} \right) \ln(z - z_1) dz &= \left(z - \frac{1}{z} \right) \ln(z - z_1) - z - \left(z_1 - \frac{1}{z_1} \right) \ln(z - z_1) - \frac{1}{z_1} \ln z. \end{aligned}$$

Утомительные, но элементарные алгебраические преобразования (с одновременным отбрасыванием слагаемых, зависящих только от t либо только от s — такие члены все равно сократятся при подстановке) приводят к результату

$$K = (\mathbf{n}_{ab}\mathbf{n}_{cd}) \left\{ \frac{((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{n}_{cd})}{(\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{n}_{cd})^2} \ln(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| + \mathbf{n}_{ab}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) + \right. \\ \left. + \frac{((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{n}_{cd})(\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{n}_{cd})}{(\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{n}_{cd})^2} \ln(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| - \mathbf{n}_{cd}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) + \right. \\ \left. + \frac{2\mathbf{r}_{ca}(\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{n}_{cd})}{(\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{n}_{cd})^2} \operatorname{arctg} \frac{(1 - (\mathbf{n}_{ab}\mathbf{n}_{cd}))|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| + \mathbf{n}_{ab}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \mathbf{n}_{cd}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\mathbf{r}_{ca}(\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{n}_{cd})} \right\}.$$

Приведенные формулы удобны для автоматического машинного счета взаимоиндукции сложных контуров: достаточно задать лишь координаты их углов в некоторой декартовой системе координат.

25 Расчет воздушного цилиндрического трансформатора

Расчет воздушного цилиндрического трансформатора можно выполнить с помощью уже рассмотренного расчета взаимоиндукции полигональных контуров. Записывая в формуле

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

интеграл в цилиндрических координатах, находим

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{4\pi l_1 l_2} \int_{-l_1/2}^{l_1/2} dz_1 \int_{-l_2/2+h}^{l_2/2+h} dz_2 \times \\ \times \int_0^{2\pi} R d\phi_1 \int_0^{2\pi} R d\phi_2 \frac{\cos(\phi_1 - \phi_2)}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + 2R^2(1 - \cos(\phi_1 - \phi_2))}} = \\ = \frac{\mu_0 N_1 N_2 R^2}{2l_1 l_2} \int_{-l_1/2}^{l_1/2} dz_1 \int_{-l_2/2+h}^{l_2/2+h} dz_2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi d\phi}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + (2R \sin \phi/2)^2}}.$$

Интегралы по $z_{1,2}$ — те же, что для параллельных сторон полигональных контуров

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 R^2}{2l_1 l_2} \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \left[(z_2 - z_1) \ln \left(\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + (2R \sin \phi/2)^2} + z_1 - z_2 \right) + \right. \\ \left. + \sqrt{(z_1 - z_2)^2 + (2R \sin \phi/2)^2} \right] \Big|_{z_1=-l_1/2}^{l_1/2} \Big|_{z_2=-l_2/2+h}^{l_2/2+h}.$$

Интегрирование по частям приводит к гораздо более простому выражению

$$M = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 R^2}{2l_1 l_2} \int_0^{2\pi} d\phi (\cos^2 \phi/2) \sqrt{(z_1 - z_2)^2 + (2R \sin \phi/2)^2} \Big|_{z_1=-l_1/2}^{l_1/2} \Big|_{z_2=-l_2/2+h}^{l_2/2+h}.$$

Оставшийся интеграл по ϕ — эллиптический. Удобно записать его в виде гипергеометрического интеграла, сделав замену переменной $\sin^2 \phi/2 = t$

$$\begin{aligned} I(k) &= \frac{1}{|z|} \int_0^{2\pi} d\phi (\cos^2 \phi/2) \sqrt{z^2 + (2R \sin \phi/2)^2} = \\ &= 2 \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{1/2} (1+k^2 t)^{1/2} dt = \pi {}_2F_1(1/2, -1/2, 2; -k^2). \end{aligned}$$

Здесь $k = 2R/z$. При $k \ll 1$ гипергеометрическая функция может быть представлена в виде ряда

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

Явный вид первых двух членов

$$I = \pi(1 + k^2/8 + \dots).$$

Воспользовавшись известной связью гипергеометрических функций от z и $z/(1-z)$, можно записать интеграл в виде

$$I = \pi \sqrt{1+k^2} {}_2F_1(3/2, -1/2, 2; k^2/(1+k^2)),$$

что дает представление в виде ряда, сходящегося при любых k (коэффициенты разложения убывают как $1/n^2$). Однако при $k \gg 1$ ряд сходится медленно, поэтому полезно получить еще одну формулу. Представим $(1+k^2 t)^{-1/2}$ в виде обратного меллиновского образа

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2 t}} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(s)\Gamma(1/2-s)}{\sqrt{\pi}} (k^2 t)^{-s} ds,$$

где интегрирование проводится по вертикальному контуру в комплексной плоскости, лежащему между $s = 0$ и $s = 1/2$. Исходный интеграл переписывается в виде

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{1/2} (1+k^2 t)^{1/2} dt = \\ &= \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(s)\Gamma(1/2-s)}{\sqrt{\pi}} k^{-2s} ds \int_0^1 t^{-1/2-s} (1-t)^{1/2} (1+k^2 t) dt = \\ &= \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(s)\Gamma(1/2-s)}{\sqrt{\pi}} k^{-2s} ds \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2-s)}{2\Gamma(2-s)} \left(1 + k^2 \frac{1/2-s}{2-s}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma^2(s)\Gamma^2(1/2-s) k^{-2s} \sin \pi s}{(1-s)\pi} ds \left(1 + k^2 \frac{1/2-s}{2-s}\right). \end{aligned}$$

Полученный интеграл вычисляется по теореме о вычетах замыканием контура полукругом справа, подынтегральное выражение имеет полюсы второго порядка

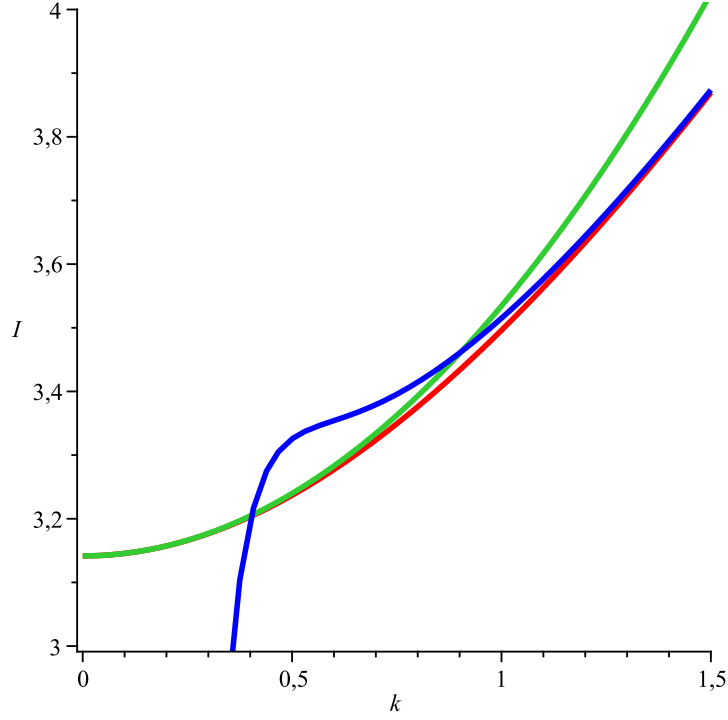


Рис. 1: Точная зависимость $I(k)$ (красная линия) вместе с приближениями при малых k (зеленая линия) и больших k (синяя линия)

в точках $s = 1/2 + n$, $n = 0, 1, \dots$, окончательно

$$\begin{aligned}
 I &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n+1/2)(-1)^n k^{-1-2n}}{(n!)^2 \pi(1/2-n)} \left[\left(1 - \frac{k^2 n}{3/2-n}\right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(-2\psi(n+1) + 2\psi(n+1/2) - 2\ln k + \frac{1}{1/2-n} \right) - \frac{3}{2} \frac{k^2}{(3/2-n)^2} \right] = \\
 &= \frac{4k}{3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n+1/2)(-1)^n k^{-1-2n}}{(n!)^2 \pi(n+1)(n-1/2)} \left[\ln 4k - \Delta_n + \frac{n+1/4}{(n+1)(n-1/2)} \right].
 \end{aligned}$$

Здесь $\psi(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции, $\Delta_0 = 0$, $\Delta_n = 2 \sum_{p=1}^{2n} (-1)^{p-1}/p$. Явный вид первых трех членов

$$I = \frac{4k}{3} + \frac{2 \ln 4k - 1}{k} + \frac{4 \ln 4k + 1}{16k^3} + \dots$$

Взаимоиндукция выражается через I следующим образом

$$M = - \frac{\mu_0 N_1 N_2 R^2}{2l_1 l_2} |z_1 - z_2| I \left(\frac{2R}{|z_1 - z_2|} \right) \Big|_{z_1 = -l_1/2}^{l_1/2} \Big|_{z_2 = -l_2/2+h}^{l_2/2+h}.$$

Самоиндукция получается при $h = 0$, $l_1 = l_2$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 R^2}{l} \left(I \left(\frac{2R}{l} \right) - \frac{8R}{3l} \right).$$

Для случая $l \gg R$ находим

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{l} \left(1 - \frac{8R}{3\pi l} + \frac{R^2}{2l^2} + \dots \right).$$

Первый член представляет собой известную формулу индуктивности длинного соленоида, следующие — поправки за счет конечной длины.

В случае $l \ll R$

$$L = \mu_0 N^2 R \left(\ln \frac{8R}{l} - \frac{1}{2} + \left(\frac{l}{8R} \right)^2 \left(2 \ln \frac{8R}{l} + \frac{1}{2} \right) + \dots \right).$$

Здесь первый член представляет собой индуктивность кругового витка в так называемом логарифмическом приближении (сравни с ЛЛVIII, (34.1) и задачей 2 к параграфу 34), следующие — поправки к нему.

26 Расчет цилиндрического трансформатора с магнитным сердечником

Расчет трансформатора с сердечником уже нельзя провести по общей формуле взаимоиנדукции контуров. Нужно заново решать задачу электродинамики сплошных сред.

Уравнения электродинамики сплошных сред выглядят следующим образом

$$\nabla \mathbf{V} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j},$$

где \mathbf{V} и \mathbf{H} — магнитные индукция и напряженность, \mathbf{j} — плотность тока обмоток, а магнитные свойства сердечника описываются материальным уравнением $\mathbf{V} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$, где μ — его магнитная проницаемость (вне сердечника $\mathbf{V} = \mu_0 \mathbf{H}$). Таким образом, и вне и внутри сердечника мы получаем одинаковые уравнения

$$\nabla \mathbf{V} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{V} = 0.$$

Считая провод обмоток тонким, можно считать, что ток обмоток распределен по поверхности сердечника, тогда он входит только в граничные условия. Граничные условия на боковой границе сердечника запишем, имея в виду дальнейшее решение задачи в цилиндрических координатах: нормальная компонента магнитной индукции непрерывна, а тангенциальная компонента напряженности терпит разрыв, равный поверхностной плотности тока

$$B_r(R+0, z) = B_r(R-0, z), \quad -(H_z(R+0, z) - H_z(R-0, z)) = J_\phi(z).$$

Индексами r, ϕ, z обозначены радиальная, азимутальная и вектикальная компоненты в цилиндрической системе координат.

Фактическое решение задачи удобно производить, введя векторный потенциал, $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$, который имеет только азимутальную компоненту, в цилиндрических координатах

$$B_r = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi).$$

Уравнение $\nabla \mathbf{B} = 0$ при этом удовлетворяется автоматически, а уравнение $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ приводит к уравнению для A_ϕ (индексы ϕ у векторного потенциала и плотности тока в дальнейшем писать не будем)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{A}{r^2} = 0.$$

Граничные условия на языке векторного потенциала имеют вид

$$A(R+0, z) = A(R-0, z), \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial r}(rA)(R-0, z) - \frac{\partial}{\partial r}(rA)(R+0, z) = \mu_0 R J.$$

Сделаем преобразование Фурье

$$A(r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} a(r, k),$$

тогда уравнение для A превращается в уравнение Бесселя

$$a'' + \frac{1}{r} a' - \frac{a}{r^2} - k^2 a = 0,$$

решениями которого, ограниченными соответственно в нуле и на бесконечности, являются

$$a_-(r, k) = \alpha I_1(|k|r), \quad a_+(r, k) = \beta K_1(|k|r).$$

Первое является решением внутри сердечника, второе — вне него. Коэффициенты определяются из граничных условий, подстановка решения в которые дает

$$\alpha I_1(|k|R) = \beta K_1(|k|R), \quad \frac{1}{\mu} \alpha |k| R I_0(|k|R) + \beta |k| R K_0(|k|R) = \mu_0 R j(k),$$

где $j(k)$ — фурье-образ плотности тока. Для дальнейшего достаточно определить поле внутри сердечника, решая выписанную систему уравнений, находим

$$a_-(r, k) = \mu_0 j \frac{I_1(|k|r)}{|k| I_0(|k|R)} \left[\frac{1}{\mu} + \frac{I_1(|k|R) K_0(|k|R)}{I_0(|k|R) K_1(|k|R)} \right]^{-1}.$$

Поток магнитного поля через поперечное сечение сердечника

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int_0^R 2\pi r dr B_z(r, z) = \int_0^R 2\pi r dr \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A = 2\pi R A(R, z) = \\ &= 2\pi R \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} a_-(R, k) = \mu_0 R \int_{-\infty}^{+\infty} ds j(s/R) e^{isz/R} \frac{I_1(|s|)}{|s| I_0(|s|)} \left[\frac{1}{\mu} + \frac{I_1(|s|) K_0(|s|)}{I_0(|s|) K_1(|s|)} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Если по первичной обмотке течет ток I , то фурье-образ плотности тока равен

$$j(s/R) = \int_{-l_1/2}^{l_1/2} dz e^{-isz/R} \frac{I N_1}{l_1} = I N_1 \frac{\sin sl_1/2R}{sl_1/2R}.$$

Вычисление потока через вторичную обмотку

$$\Phi = \frac{N_2}{l_2} \int_{-l_2/2+h}^{l_2/2+h} \Phi(z) dz$$

приводит к аналогичному интегралу

$$\frac{N_2}{l_2} \int_{-l_2/2+h}^{l_2/2+h} e^{isz/R} dz = N_2 e^{ish/R} \frac{\sin sl_2/2R}{sl_2/2R}.$$

Окончательно для взаимоиндукции получаем формулу

$$M = 2\mu_0 R \int_0^\infty ds \frac{I_1(s)}{sI_0(s)} \left[\frac{1}{\mu} + \frac{I_1(s)K_0(s)}{I_0(s)K_1(s)} \right]^{-1} \cos \frac{sh}{R} \left(N_1 \frac{\sin sl_1/2R}{sl_1/2R} \right) \left(N_2 \frac{\sin sl_2/2R}{sl_2/2R} \right).$$

Самоиндукция, как и в предыдущем случае, получается при $h = 0$, $l_1 = l_2$, $N_1 = N_2$

$$L = 2\mu_0 R N^2 \int_0^\infty ds \frac{I_1(s)}{sI_0(s)} \left[\frac{1}{\mu} + \frac{I_1(s)K_0(s)}{I_0(s)K_1(s)} \right]^{-1} \left(\frac{\sin sl/2R}{sl/2R} \right)^2.$$

Если $\mu = 1$, то

$$\frac{I_1(s)}{sI_0(s)} \left[\frac{1}{\mu} + \frac{I_1(s)K_0(s)}{I_0(s)K_1(s)} \right]^{-1} = I_1(s)K_1(s)$$

и мы получаем еще одно представление взаимоиндукции обмоток воздушного трансформатора

$$M = 2\mu_0 R \int_0^\infty ds I_1(s)K_1(s) \cos \frac{sh}{R} \left(N_1 \frac{\sin sl_1/2R}{sl_1/2R} \right) \left(N_2 \frac{\sin sl_2/2R}{sl_2/2R} \right).$$

27 Расчет трансформатора под нагрузкой

Расчет трансформатора под нагрузкой производится по правилам Кирхгофа

$$(i\omega L_1 + R_1)I_1 + i\omega M I_2 = \mathcal{E}, \quad (i\omega L_2 + R_2 + Z_{\text{н}})I_2 + i\omega M I_1 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}(i\omega L_2 + R_2 + Z_{\text{н}})}{(i\omega L_1 + R_1)(i\omega L_2 + R_2 + Z_{\text{н}}) + \omega^2 M^2}, \quad I_2 = \frac{-i\omega M \mathcal{E}}{(i\omega L_1 + R_1)(i\omega L_2 + R_2 + Z_{\text{н}}) + \omega^2 M^2}.$$

Полученные формулы сильно упрощаются для *идеального трансформатора*, когда $R_{1,2} = 0$, $M^2 = L_1 L_2$

$$I_1 = \frac{L_2}{L_1} \frac{\mathcal{E}}{Z_{\text{н}}} - i \frac{\mathcal{E}}{\omega L_1}, \quad I_2 = -\frac{M}{L_1} \frac{\mathcal{E}}{Z_{\text{н}}} = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{\mathcal{E}}{Z_{\text{н}}}.$$

Из этих формул видно, что активная составляющая тока первичной обмотки трансформатора, нагруженного на активное сопротивление R , растет с уменьшением сопротивления нагрузки.

28 Расчет и оптимизация трансформатора для питания первичного контура

В общем случае трансформатор с нагрузкой выглядит для источника как комплексное сопротивление

$$Z_{\text{в}} = \frac{\mathcal{E}}{I_1} = i\omega L_1 + R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{i\omega L_2 + R_2 + Z_{\text{н}}}.$$

Оптимизация трансформатора для питания первичного контура приводит к задаче: обеспечить максимальное значение модуля величины

$$G_{\text{п}} = \frac{I_2}{\mathcal{E}} = \frac{-i\omega M}{(i\omega L_1 + R_1)(i\omega L_2 + R_2 + Z_{\text{н}}) + \omega^2 M^2},$$

которая имеет размерность проводимости и может быть названа проходной проводимостью трансформатора (вместе с нагрузкой), при заданном значении $|Z_{\text{в}}| = R_{\text{в}}$ для согласования с выходным сопротивлением генератора.

Эта задача особенно просто решается для идеального трансформатора, нагруженного на активное сопротивление R . Поскольку индуктивность катушки пропорциональна квадрату числа витков, отношение $L_1/L_2 = n^2$ равно квадрату коэффициента трансформации. Максимальный ток во вторичной обмотке достигается при $\omega L_2 \gg R$, тогда

$$R_{\text{н}} = n^2 R, \quad I_2 = -\mathcal{E}/nR.$$

Таким образом, оптимальный коэффициент трансформации равен

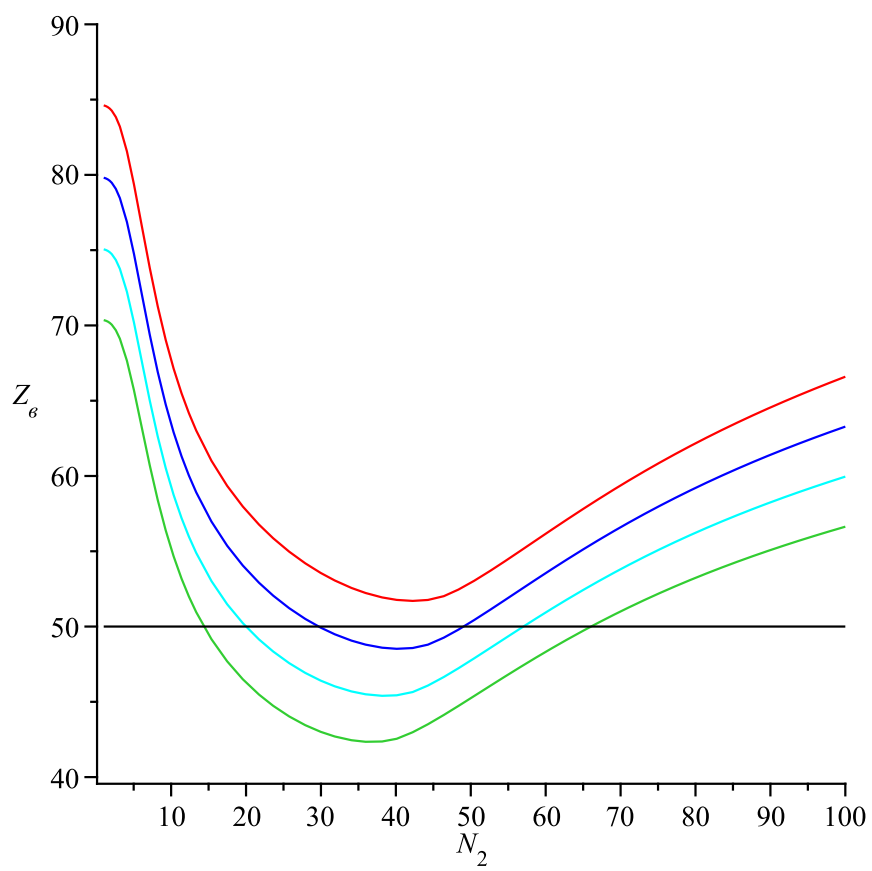
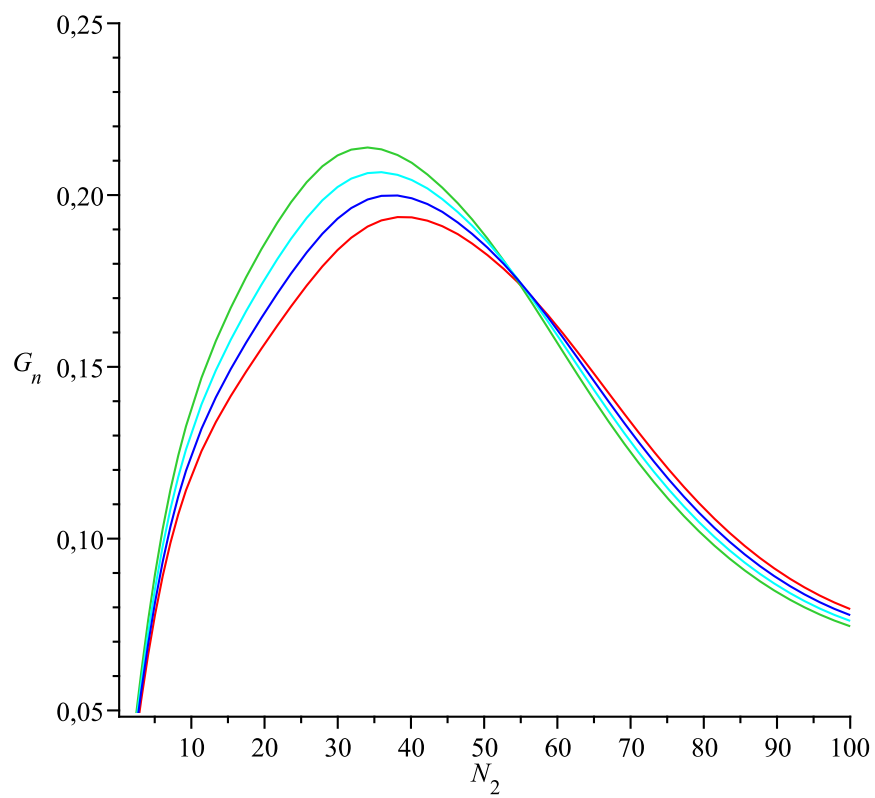
$$n = \sqrt{R_{\text{н}}/R},$$

а максимальный ток

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R_{\text{н}}R}}.$$

Решение задачи для идеального трансформатора дает нам ориентир в задаче о реальном трансформаторе, которая может быть решена лишь численно ввиду сложной зависимости индуктивностей и активных сопротивлений от параметров трансформатора. Имея в виду условия, в которых проводились опыты Перегудова, рассчитаем трансформатор для частоты $f = 10$ кГц и положения переключателя 50 Ом на генераторе ГЗ-109, при этом максимальное напряжение на нагрузке равно 15 В. Примем активное сопротивление и индуктивность первичного контура (они оценивались выше) равными 0.25 Ом и 1 мкГн, тогда комплексное сопротивление нагрузки равно $Z_{\text{н}} = 0.25 + 0.063i$ Ом. Нагрузка в основном активная, коэффициент трансформации равен примерно 14, а максимальный ток — 4.2 А.

Ниже приведены зависимости проходной проводимости и входного сопротивления для реального трансформатора от числа витков вторичной обмотки. Принято, что трансформатор намотан на каркасе диаметром 40 мм двумя однослойными обмотками, симметрично одна на другой. Первичная обмотка ведется проводом 0.2 мм, вторичная — проводом 1 мм. Сопротивление меди $\rho = 1.8 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Кривые разного цвета соответствуют разному числу витков первичной обмотки: 200 (зеленая), 210 (голубая), 220 (синяя) и 230 (красная).



Видно, что оптимальный трансформатор содержит число витков первичной обмотки

около 225 и вторичной около 40. И действительно, при $N_1 = 224$, $N_2 = 37$ получаем $|Z_B| = 50.03$ Ом, $|G_{II}| = 0.20$ 1/Ом и максимальный ток $I_2 = 2.96$ А. Длины обмоток оптимального трансформатора оказываются близкими (44.8 и 37 мм).