Преобразование плотностей заряда и тока точечного заряда

Задача. Получите формулы преобразования плотностей заряда и тока, если для точечного заряда $\rho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t))$, $\mathbf{j} = q\dot{\mathbf{R}}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t))$, а преобразования координат и времени (Лоренца) уже известны.

Решение. Я разберу одномерный случай, обобщение на трехмерный довольно просто. Итак, пусть

$$\rho(t,x) = \delta(x - X(t)), \quad j(t,x) = \dot{X}(t)\delta(x - X(t)). \tag{1}$$

$X(t)$ — закон движения заряда. Сделаем преобразования Лоренца

$$x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad t = \frac{t' - vx'}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{2}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho(t,x) &= \delta\left(\frac{x' - vt'}{\sqrt{1-v^2}} - X\left(\frac{t' - vx'}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right), \\ j(t,x) &= \dot{X}\left(\frac{t' - vx'}{\sqrt{1-v^2}}\right)\delta\left(\frac{x' - vt'}{\sqrt{1-v^2}} - X\left(\frac{t' - vx'}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Теперь мы хотим переписать дельта-функции в виде $\delta(x' - X'(t'))$. Как известно

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|df/dx(x_0)|}, \tag{4}$$

где $f(x_0) = 0$. В нашем случае имеем уравнение

$$\frac{X'(t') - vt'}{\sqrt{1-v^2}} - X\left(\frac{t' - vX'(t')}{\sqrt{1-v^2}}\right) = 0. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что $X'(t')$ как раз представляет собой преобразование Лоренца исходного закона движения заряда, формулу (5) можно переписать в виде

$$\frac{X'(t') - vt'}{\sqrt{1-v^2}} = X(t), \quad \frac{t' - vX'(t')}{\sqrt{1-v^2}} = t. \tag{6}$$

Вычисляя производную по t' от (5), найдем

$$\dot{X}'(t') - v - (1 - v\dot{X}'(t'))\dot{X}\left(\frac{t' - vX'(t')}{\sqrt{1-v^2}}\right) = 0, \tag{7}$$

откуда

$$\dot{X}\left(\frac{t' - vX'(t')}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \frac{\dot{X}'(t') - v}{1 - v\dot{X}'(t')}. \tag{8}$$

Теперь вычисляем производную от аргумента дельта-функции в (3)

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{x' - vt'}{\sqrt{1-v^2}} - X\left(\frac{t' - vx'}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right) = \frac{1 + v\dot{X}\left(\frac{t'-vx'}{\sqrt{1-v^2}}\right)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1 - v\dot{X}'(t')} \tag{9}$$

(при получении последнего равенства использовано (8)). Выражения для плотностей заряда и тока приобретают вид

$$\rho(t,x)=\frac{1-v\dot{X}'(t')}{\sqrt{1-v^2}}\delta(x'-X'(t')),\quad j(t,x)=\frac{\dot{X}'(t')-v}{\sqrt{1-v^2}}\delta(x'-X'(t')). \tag{10}$$

Используя определения

$$\rho'(t',x')=\delta(x'-X'(t')),\quad j'(t',x')=\dot{X}'(t')\delta(x'-X'(t')), \tag{11}$$

окончательно находим

$$\rho(t,x)=\frac{\rho'(t',x')-vj'(t',x')}{\sqrt{1-v^2}},\quad j(t,x)=\frac{j'(t',x')-v\rho'(t',x')}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{12}$$