Теплообменник на встречных потоках

Уравнение теплопроводности в случае движущейся среды имеет вид (см. ЛЛ6, (50,1))

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T = k\Delta T$$

k — коэффициент температуропроводности. Рассмотрим двумерную стационарную задачу. Пусть в области $0 < y < b$ вода течет в положительном направлении оси x, а в области $-b < y < 0$ — с такой же скоростью в отрицательном. При $y = \pm b$ потоки теплоизолированы, $\partial T/\partial y(x, \pm b) = 0$, а при $y = 0$ имеется окно $-a < x < a$ теплового контакта, в котором $T(x, +0) = T(x, -0)$, $\partial T/\partial y(x, +0) = \partial T/\partial y(x, -0)$, в области $|x| > a$ потоки теплоизолированы $\partial T/\partial y(x, \pm 0) = 0$. В соответствие со сказанным выше, температура в полосах $0 < y < b$ и $-b < y < 0$ удовлетворяет уравнениям

$$\pm \frac{v}{k}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

На входе в теплообменник, то есть при $x \to -\infty$, $-b < y < 0$ и $x \to +\infty$, $0 < y < b$ температуры (без ограничения общности) равны $\pm T_0$. Отметим, что тогда температура удовлетворяет соотношению $T(x, y) = -T(-x, -y)$. Нужно определить температуры на выходе из теплообменника.

Обезразмерим задачу. Введем $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{y} = y/a$, $\tilde{T} = T/T_0$ и безразмерные параметры $\varepsilon = b/a$, $u = vb^2/ka$. Тогда (тильды опускаем)

$$\pm u \frac{\partial T}{\partial x} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

а граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, \pm 1) = 0,$$
$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, \pm 0) = 0, \quad |x| > 1,$$
$$T(x, +0) = T(x, -0), \quad |x| < 1,$$
$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, +0) = \frac{\partial T}{\partial y}(x, -0), \quad |x| < 1.$$

Температура на входе

$$T(x, y) \to \begin{cases} 1, & x \to -\infty, \quad 0 < y < 1, \\ -1, & x \to +\infty, \quad -1 < y < 0. \end{cases}$$

Решение удобно представить через функцию Грина. Введем оператор

$$L = u\frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

и сопряженный к нему оператор

$$L^\dagger = -u\frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Тогда $LT = 0$, а уравнение для функции Грина

$$L^\dagger G = \delta(x - x')\delta(y - y').$$

Граничные условия $\partial G/\partial y(x, 0) = \partial G/\partial y(x, 1) = 0$. На обеих бесконечностях $\partial G/\partial x(x, y) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. А вот сама функция Грина не может стремиться к нулю сразу на обеих бесконечностях. Это очевидно, если проинтегрировать уравнение для нее по полосе $-\infty < x < \infty$, $0 < y < 1$

$$-\int_0^1 dy\, (uG + \varepsilon^2 G_x)|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 1.$$

В качестве условия на бесконечности удобно задать $G(x,y) \to 0$ при $x \to +\infty$. Тогда $G(x,y) \to 1/u$ при $x \to -\infty$. Пишем

$$\begin{aligned}
T(x',y') &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^1 dy\, T L^\dagger G = \\
&= -u \int_0^1 dy\, TG|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \varepsilon^2 \int_0^1 dy\, (TG_x - T_x G)|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (TG_y - T_y G)|_{y=0}^{y=1} = \\
&= u \int_0^1 dy\, TG|_{x=-\infty} - \int_{-1}^1 dx\, T_y G|_{y=0} = 1 - \int_{-1}^1 dx\, T_y G|_{y=0}.
\end{aligned}$$

При $x' \to +\infty$ имеем

$$T|_{x=+\infty} = 1 - \frac{1}{u} \int_{-1}^1 dx\, T_y|_{y=0}.$$

Чтобы найти тепловой поток $T_y|_{y=0}$ через окно $|x| < 1$, воспользуемся симметрией температуры. Пишем

$$T(x',0) = 1 - \int_{-1}^1 dx\, T_y(x,0) G(x,0;x',0),$$

$$T(-x',0) = 1 - \int_{-1}^1 dx\, T_y(x,0) G(x,0;-x',0) = 1 - \int_{-1}^1 dx\, T_y(x,0) G(-x,0;-x',0)$$

и складываем эти равенства

$$2 = \int_{-1}^1 dx\, T_y(x,0)[G(x,0;x',0) + G(-x,0;-x',0)].$$

Поскольку функция Грина зависит в действительности только от $x - x'$, в квадратных скобках стоит четная функция $K(x-x') = G(x-x',0;0,0) + G(x'-x,0;0,0)$. Мы получили интегральное уравнение относительно T_y. Для фактического его решения нужно определить функцию Грина.

Будем искать ее в виде разложения по собственным функциям оператора $\partial^2/\partial y^2$ с граничными условиями $\partial G/\partial y(x,0) = \partial G/\partial y(x,1) = 0$

$$G(x,y) = g_0/2 + \sum_{n=1}^\infty g_n(x) \cos \pi n y.$$

Коэффициенты удовлетворяют уравнениям

$$-u g_n' - \varepsilon^2 g_n'' + \pi^2 n^2 g_n = 2\delta(x-x') \cos \pi n y'.$$

Решения соответствующих однородных уравнений, производные которых убывают при $x \to \pm\infty$, равны соответственно $A_n e^{a_{n-} x}$ и $B_n e^{a_{n+} x}$, где

$$a_{n\pm} = \frac{-u \mp \sqrt{u^2 + 4\varepsilon^2 \pi^2 n^2}}{2\varepsilon^2}$$

— корни уравнения $-ua - \varepsilon^2 a^2 + \pi^2 n^2 = 0$. Отметим, что $a_{n+} + a_{n-} = -u/\varepsilon^2$, $a_{n+} a_{n-} = -\pi^2 n^2/\varepsilon^2$. Коэффициенты A_n, B_n определяются из условий непрерывности коэффициентов g_n при $x = x'$ и скачка их производных $-\varepsilon^2 [g_n'(x'+0) - g_n'(x'-0)] = 2\cos \pi n y'$. Окончательно

$$G(x,y;x',y') = \begin{cases} \dfrac{1}{u} + \dfrac{2}{\varepsilon^2} \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos \pi n y \cos \pi n y' e^{a_{n-}(x-x')}}{a_{n-} - a_{n+}}, & x < x' \\ \dfrac{1}{u} e^{-(x-x')u/\varepsilon^2} + \dfrac{2}{\varepsilon^2} \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos \pi n y \cos \pi n y' e^{a_{n+}(x-x')}}{a_{n-} - a_{n+}}, & x > x'. \end{cases}$$

Ядро интегрального уравнение для $T_y(x,0)$ имеет вид

$$K(x) = \frac{1}{u}(1 + e^{-|x|u/\varepsilon^2}) + \frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{a_{n+}|x|} + e^{-a_{n-}|x|}}{a_{n-} - a_{n+}} = \frac{1}{u} + \tilde{K}(x).$$

Отметим, что убывающие на бесконечности члены все положительны, а интеграл от них равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{K}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{u} e^{-|x|u/\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{a_{n+}|x|} + e^{-a_{n-}|x|}}{a_{n-} - a_{n+}} \right) dx = \frac{2\varepsilon^2}{u^2} - \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+} a_{n-}} = \frac{2\varepsilon^2}{u^2} + \frac{2}{3}.$$

Можно получить простую оценку на температуру на выходе из теплообменника. Обозначим полный тепловой поток через окно $Q = \int_{-1}^{1} T_y(x,0)\,dx$ и перепишем уравнение для $T_y(x,0)$ в виде

$$2 = \frac{Q}{u} + \int_{-1}^{1} \tilde{K}(x - x') T_y(x', 0)\,dx'.$$

Проинтегрируем его по x

$$2 = \frac{Q}{u} + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dx'\, T_y(x', 0) \left(\int_{-1}^{1} \tilde{K}(x - x')\,dx \right).$$

Для величины в круглых скобках справедлива оценка

$$\int_{-1}^{1} \tilde{K}(x - x')\,dx \le \frac{2\varepsilon^2}{u^2} + \frac{2}{3}.$$

Используя вполне естественное предположение, что всюду $T_y(x,0) > 0$ (неплохо бы это потом доказать), получаем оценку

$$2 \le \frac{Q}{u} + \left(\frac{\varepsilon^2}{u^2} + \frac{1}{3} \right) Q,$$

откуда

$$T|_{x=+\infty} = 1 - \frac{Q}{u} \le -\frac{1-c}{1+c}, \quad c = \left(\frac{\varepsilon^2}{u^2} + \frac{1}{3} \right) u.$$

Минимальное значение $c = 2\varepsilon/\sqrt{3}$ достигается при $u = \varepsilon\sqrt{3}$, на температуру при этом получается самая лучшая оценка.